This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

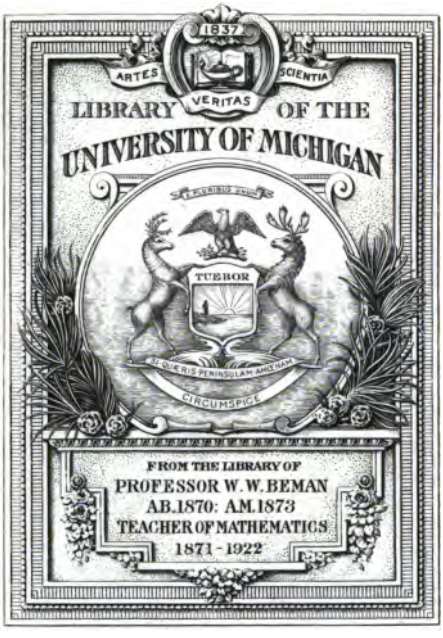
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870: A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922

17

SAMMLUNG

VON

AUFGABEN UND BEISPIELEN

AUS DER

TRIGONOMETRIE UND STEREOMETRIE

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. FRIEDRICH REIDT,

OBERLEHRER AM GYMNASIUM UND DER HÖHEREN BÜRGERSCHULE IN HAMM.

II. THEIL: STEREOMETRIE.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1877.

Mathematics
QA
537
.R36
1877

Math. Lib.
Lib. of W. W. Beman
6-15-1926

Vorwort.

In der vorliegenden zweiten Auflage der stereometrischen Aufgabensammlung sind die Nummern der einzelnen Aufgaben nach den Paragraphen geordnet, so dass dieselben also nicht mehr durch das ganze Heft fortschreiten. Neu hinzugekommen sind zu den früheren die (theilweise schwierigeren) Aufgaben: §. 1, 20; §. 7, 8b), c), 11, 12, 14—16, 18, 23—25; §. 9, 32—34, 41—43; §. 12, 37—41, 85, 95; §. 13, 37, 38, 51; §. 14, 18, 19, 21—28; §. 17, 66, 67, 71, 82, 90, 93; §. 18, 7, 22, 32, 34, 42, 47—52, 56, 59, 60; §. 19, 24, 40, 45, 46; §. 20, 18, 20, 21, 31, 40; §. 21, 13, 17, 23; §. 22, 15, 19, 31; §. 23, 11, 21, 23, 26, 37, 42; §. 24, 24, 37, 44, 46, 47, 58, 65, 71; §. 25, 20, 25, 28; §. 26, 18, 23, 31, 34, 40, 42—44, 47, 53, 58, 64, 67—71, 79, 82, 83; §. 27, 3, 4, 12, 15, 20, 25, 33, 40, 49, 55, 70, 76; §. 29, 1, 2, 7—13, 18—21, 24, 26—29, 35—39; §. 30, 5, 7, 14—16, 27, 28, 31, 37; §. 31, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 20, 22, 29; §. 32, 7—10, 14, 24, 25, 34—39; §. 33, 2, 8. In Betreff der benutzten Quellen bemerke ich, dass ein Theil der neuen Aufgaben Programmen höherer Lehranstalten entnommen ist, und dass die Nummern 1, **a—d**, **f—m**, **o—s** im §. 33 von Direktor Krumme im pädagogischen Archiv veröffentlicht wurden. Ausserdem verdanke ich den Elementen der Mathematik von Baltzer, dem Lehrbuch der Stereometrie von Wittstein und der viele vortreffliche Uebungen enthaltenden Aufgabensammlung von La Frémoire einzelne Anregungen.

Hamm, im Mai 1877.

Reidt.

Register.

II. Theil: Stereometrie.

Seite

Einleitung: Anzahl von Linien oder Ebenen. Aufg. 1—8. Constructionen 9—12. Anzahl der Durchschnitte von Ebenen 13—15 1

Erster Abschnitt: Von den geraden Linien und Ebenen in Verbindung mit einander.

I. Capitel: Verbindung gerader Linien unter sich und mit Ebenen.

§. 1. Von Geraden, welche zu einer Ebene senkrecht stehen 3
a) Lehrsätze: 1—15. *b*) Constructions-Aufgaben: 16—31. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) ohne trigonometrische Functionen 32—39; *β*) mit trigonometrischen Functionen 40—43.

§. 2. Von Geraden, welche zu einer Ebene schief stehen 8
a) Lehrsätze: 1—14. *b*) Constructions-Aufgaben: 15—21. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) 22—26; *β*) 27—35.

§. 3. Eine Ebene und eine zu ihr parallele Gerade . . 12
a) Lehrsätze: 1—11. *b*) Constructions-Aufgaben: 12—17. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) 18—19; *β*) 20—22.

II. Capitel: Verbindung zweier Ebenen mit einander.

§. 4. Zwei sich schneidende Ebenen. 15
a) Lehrsätze: Flächenwinkel überhaupt 1—9. Senkrechte Ebenen 10—20. *b*) Constructions-Aufgaben: 21—33. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) 34—37; *β*) 38—48.

§. 5. Zwei parallele Ebenen 20
a) Lehrsätze: 1—14. *b*) Constructions-Aufgaben: 15—32. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) 33—34; *β*) 35—36.

Seite

III. Capitel: Verbindung dreier Ebenen mit einander.

§. 6. Drei Ebenen überhaupt 24
a) Lehrsätze: 1—13. *b*) Constructions-Aufgaben: 14—20.

§. 7. Die dreiseitige Ecke 26
a) Lehrsätze: Congruenz und Symmetrie 1—5. Polar-Ecke 6. Winkel-Summe 7—12. Merkwürdige Linien 13—18. *b*) Constructions-Aufgaben: Ebene Construction v. Stücken d. Ecke 19—25. Constr. v. Punkten im Raume 26—27. Constr. v. Ecken im Raume 28. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *β*) Auflösung der Ecke 29—33. Von der Ecke abhängige Stücke 34—37.

Zweiter Abschnitt: Von den Körpern.

IV. Capitel: Von den Körpern überhaupt und den Linien und Figuren an denselben.

§. 8. Das Prisma 30
a) Lehrsätze: Diagonalaxen und Diagonalebenen des Parallelepipedon 1—8. Würfel von Summen und Differenzen 9—10. Flächenwinkel des Prismas 11—14. Schnittfiguren 15—16. Congruenz 17—18. *b*) Constructions-Aufgaben: Constr. in der Ebene 19—22. Im Raume 23. Ebene Netze 24—27. Projectionen 28—29. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) Parallelepipedon 30—32. Schnitte des Prismas 33—37. Flächenräume 38. *β*) 39—44.

§. 9. Die Pyramide 35
a) Lehrsätze: Vermischtes 1—3. Merkwürdige Gerade oder Punkte, insbes. der Tetraëder 4—13. Grenzflächen, Winkel und Kanten 14—20. Schnitte 21—22. Congruenz und Aehnlichkeit 23—27. *b*) Constructions-Aufgaben: Im Raume 28—30. Netze 31—36. Schnitte im Raume 37—43. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) Pyramide für sich 44—50. Pyramide und Prisma 51—55. Pyramidenstumpf 56—58. *β*) 59—69.

§. 10. Der Cylinder 43
a) Lehrsätze: 1. Schnitt- und Berührungs-Ebenen 2—12. Vermischte Sätze 13—17. Schnitte des schiefen Cylinders 18—19. *b*) Constructions-Aufgaben: 20—24. In der Ebene; Schnittfiguren 25—31. Constr. von Cylindern 32—34. Berührungs-Aufgaben 35—37. Sich schneidende Cylinder 38. Netze 39—40. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) 41—49. *β*) 50—52.

Seite

§. 11. Der Kegel 49
a) Lehrsätze: Kegel für sich 1—11. Kegel mit Cylinder 12. *b*) Constructions-Aufgaben: Gerader Kegel; Constr. in der Ebene 13—15; von Kegeln 16—18. Kegel und Pyramide 19. Schiefer Kegel 20—22. Kegelstumpf 23. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) Schnittfiguren 24—26. Dimensionen 27—29. Kegel mit Pyramide 30—31. Kegelstumpf 32—33. *β*) 34—38.

§. 12. Die Kugel 53
a) Lehrsätze: Sehnen und Schnittkreise 1—5. Zwei Kugeln 6—8. Kugel und Kegel 9—11. Berührungsebenen 12. Aehnlichkeitspunkte 13—15. Sätze vom Kreis auf die Kugel übertragen 16—26. Kreislinien auf der Kugel; sphärische Dreiecke 27—41. Einbeschriebene Körper 42—44. *b*) Constructions-Aufgaben: Constr. von Mittelpunkten und von Kugeln; Berührungs-Aufgaben 45—63. Constr. von Flächen an die Kugel 64—68. Sphär. Dreieck 69—73. Constr. in der Ebene 74—76. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) Die Kugel für sich 77—78. Kugel mit anderen Körpern 79—96. *β*) 97—100.

§. 13. Die regelmässigen Polyeder 65
a) Lehrsätze: 1—15. *b*) Constructions-Aufgaben: Netze 16—20. Schnittfiguren; Constr. in der Ebene 21—25. Constr. der Körper 26—35. *c*) Rechnungs-Aufgaben: *α*) Dimensionen 36—38. Oktaëder und Tetraëder 39—45. Ikosaëder 46. Dodekaëder 47. *β*) 48—55.

§. 14. Von den Körpern im Allgemeinen 71
Lehrsätze: Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit 1—12. Anzahl und Summe der Winkel, Ecken oder Flächen 13—28.

V. Capitel: Berechnung von Oberflächen.

§. 15. Oberflächen von Polyedern 74
Prisma 1—10. Pyramide 11—22. Regelm. Polyeder 23—27.

§. 16. Oberfläche des geraden Cylinders 77
Einfache Anwendung der Formeln 1—8. Zusammengesetzte Aufgaben 9—18. Theile des Cylinders 19—22.

§. 17. Oberfläche des geraden Kegels 79
Kegel für sich. Einfache Anwendung der Formeln 1—18. Anwendung eines Schnittkreises 19—65. Zusammengesetzte Aufgaben 66—76. Cylinder mit Kegelmantel 77—80. Oberfl. des Prismas und des Kegels 81. Kegelstumpf 82—93.

§. 18. Die Oberfläche der Kugel und ihrer Theile 84
Kugel für sich 1—6. Kugel mit reg. Polyedern 7—14. Kugel mit Kegel und Cylinder; Rotationskörper 15—21. Kugelsegment 22—37. Zone 38—44. Sphärische Figuren 45—56. Vermischtes 57—66.

Seite

VI. Capitel: Berechnung der Volumina.

§. 19. Das Prisma 91
α) Rechtwinkeliges Parallelepiped. Einfache Aufg. 1—8. Zusammengesetzte Aufg. 9—24. Prisma 25—32. Prisma mit Cylinder 33; mit Kegel 34; mit Kugel 35; mit regelmässigen Polyedern 36—37. β) 38—47.

§. 20. Die Pyramide 96
α) Einfache Aufgaben 1—7. Zusammengesetzte Aufgaben 8—13. Pyram. einer Kugel einbeschrieben 14—15. Theile der Pyramide 16—21. Vermischtes 22—31. β) 32—45.

§. 21. Die abgestumpfte Pyramide 102
α) Für sich 1—14. Theilung vollständiger und abgest. Pyramiden 15—22. Zwei Pyramiden 23—24; mit Kegel 25; mit Kugel 26; mit regelm. Polyedern 27—28; mit Prismen 29—30. β) 31—35.

§. 22. Die regelmässigen Polyeder 107
α) 1. Tetraëder, Oktaëder und Würfel für sich 2—15; in Verbindung mit der Kugel 16—23. Einbeschriebene Körper 24—26. Theilung des Tetraëders 27—29. Dodekaëder 30—32. Dodekaëder mit Ikosaëder 33—34. β) 35—38.

§. 23. Der Cylinder 111
α) Für sich 1—12. Röhre 13—14; mit seiner Oberfläche 15—20. Spec. Gew. 21—24; mit Polyeder 25—27; mit Kugel 28—29; mit regelm. Polyeder 30—32; mit in u. um die Grundfl. beschriebenen Figuren 33—34. Durchschnitte von Cylindern 35—37. Schiefer Schnitt 38—39. β) 40—49.

§. 24. Der Kegel 117
α) Für sich. Einfache Aufg. 1—16. Zusammenges. Aufg. 17—26; in Verbindung mit dem geg. Mantel 27—32. Der Mantel aufgerollt 33—37. Hohlkegel 38—39; mit Cylinder 40—47; mit Pyramide 48—50; mit regelm. Polyeder 51—53; mit Kugel 54—58. Theilung des Kegels 59. β) 60—78.

§. 25. Der abgestumpfte Kegel 125
α) Für sich. Einfache Aufg. 1—4. Zusammenges. Aufg. 5—15. Theilung des Stumpfs 16; mit Prisma 17—18; mit Pyramide 19—22; mit Cylinder 23—34; mit Kegel 35—36; mit Kugel 37—38. β) 39—47.

§. 26. Die Kugel 131
α) Für sich. Einfache Aufg. 1—7. Gewicht 8—15. Zusammenges. Aufg. 16—23; mit Cylinder 24—35; mit Kegel 36—58; mit Kegelstumpf 59—64; mit Kugel 65—66; mit Polyeder 67—83; mit Zonenfläche 84—85. β) 86—94.

§. 27. Kugelausschnitt, Kugelsegment und körperliche Zone 143
α) Ausschnitt 1—4. Segment. Für sich. Einfache Aufg.

Seite

5—9. Gewicht 10—12. Verb. mit der Oberfl. 13—20; mit Polyeder 21. Regelm. Polyeder 22—25; mit Cylinder 26—33; mit Kegel 34—41; mit Kugel 42—45. Vermischtes 46—49. Zone 50—59. β) Ausschnitt 60—67. Segment 68—71. Zone 72—76.

§. 28. Sonstige Theile der Kugel 152
α) 1—8. β) 9—15.

§. 29. Der Obelisk und das Prismatoid 154
α) 1—40. β) 41—42.

§. 30. Einfache Rotationskörper. 163
α) 1—21. β) 22—37.

Anhang: §. 31. Maxima und Minima 1—29 169

§. 32. Schwierigere Aufgaben aus allen Gebieten 1—39 171

§. 33. Themata zu grösseren Arbeiten 1—9 178

Stereometrische Aufgaben.

Einleitung.

Anzahl von Linien oder Ebenen.

1. Wieviel gerade Linien lassen sich höchstens durch 4, wieviel durch n im Raume gegebene Punkte ziehen, so dass die Lage einer jeden durch gegebene Punkte bestimmt ist?

2. Von n im Raume gegebenen Punkten sollen α in einer geraden Linie, β andere in einer zweiten, und γ andere in einer dritten Geraden liegen; wieviel verschiedene gerade Linien sind dann überhaupt durch gegebene Punkte ihrer Lage nach bestimmt?

3. Auf jeder von n sich in einem Punkte schneidenden Geraden im Raume seien ausser diesem noch p andere Punkte gegeben; wieviel gerade Linien giebt es überhaupt im höchsten Fall zwischen diesen Punkten? Beispiel: $n = 4$, $p = 3$.

4. Wieviel verschiedene Ebenen lassen sich höchstens durch n (7) gegebene Punkte legen, sodass die Lage einer jeden durch gegebene Punkte bestimmt ist?

5. Es sind a (5) gerade Linien und b (9) Punkte im Raume gegeben; wieviel verschiedene Ebenen kann man höchstens construiren, sodass jede derselben eine jener Linien und einen dieser Punkte enthält?

6. Wieviel Ebenen sind bestimmt durch n (4) einander parallele und eine, zwei von diesen Parallelen schneidende Gerade?

7. Von einem Punkte aus gehen n (6) Gerade im Raume; von wieviel Ebenen höchstens ist durch dieselben die Lage bestimmt?

8. Wieviel Ebenen können durch Eckpunkte eines im Raume gegebenen Vierecks bestimmt werden?

Constructionen.

Unter der Voraussetzung, dass man durch jede drei im Raume gegebene, nicht in gerader Linie liegende Punkte eine Ebene construiren könne, soll die Auflösung folgender Constructionsaufgaben angegeben werden:

9. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine parallele Gerade im Raume zu legen. Wieviel verschiedene solche Linien sind möglich?

10. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine sie kreuzende (windschiefe) Gerade zu legen. Wieviel Auflösungen?

11. Durch einen gegebenen Punkt in einer gegebenen Ebene zu einer ausserhalb der letzteren liegenden Geraden eine sie kreuzende Gerade zu legen. Vergl. 10. Wieviel Auflösungen?

12. Durch einen gegebenen Punkt in einer gegebenen Ebene zu einer ausserhalb der letzteren liegenden Geraden eine sie kreuzende Gerade so zu legen, dass sie mit der durch jenen Punkt in der Ebene gehenden und mit der gegebenen Geraden in derselben Ebene liegenden geraden Linie einen gegebenen Winkel bilde.

Anzahl der Durchschnitte von Ebenen.

13. In wieviel geraden Linien können sich n (5) gegebene Ebenen höchstens schneiden?

14. In wieviel Linien schneiden sich n gegebene Ebenen, wenn α derselben durch eine einzige Gerade, β andere durch eine zweite Gerade gehen, und γ andere einander parallel sind? $n = 12$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$.

15. n (12) im Raume gegebene Gerade sollen sich in ebensoviel Punkten schneiden. Wieviel Durchschnittslinien können diejenigen Ebenen mit einander bilden, von denen jede durch drei der genannten Punkte geht?

Erster Abschnitt.

Von den geraden Linien und Ebenen in Verbindung mit einander.

I. Capitel. Verbindung gerader Linien unter sich und mit Ebenen.

§. 1. Von Geraden, welche zu einer Ebene senkrecht stehen.

a. Lehrsätze.

1. In einer Ebene MN seien zwei einander in B schneidende Gerade CD und EF gezogen, und es sei $BE = BF$, $BC = BD$ gemacht. Ein Punkt A liege ausserhalb MN so, dass $AE = AF$, $AC = AD$ ist. Man soll beweisen, dass die Gerade AB senkrecht zu MN stehe.

2. Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von drei gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, ist eine zu der Ebene dieser drei Punkte senkrechte Gerade. — Man construire in der Ebene den Fusspunkt dieser Geraden.

3. Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, ist die zu der Verbindungslinie der beiden Punkte in der Mitte derselben senkrecht stehende Ebene.

4. Die drei Ebenen, welche bezüglich zu den Seiten eines Dreiecks in den Halbirungspunkten derselben senkrecht stehen, schneiden sich in einer einzigen Geraden, und diese Gerade steht zu der Ebene des Dreiecks in dem Mittelpunkt des demselben umbeschriebenen Kreises senkrecht. Vergl. 2, 3.

5. Steht ein ausserhalb einer Ebene gegebener Punkt von n Punkten dieser Ebene gleichweit ab, so liegen die letzteren in der Peripherie eines Kreises, und der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Fusspunkt der vom gegebenen Punkt auf die gegebene Ebene gefällten senkrechten Geraden. — Zwei Umkehrungen.

6. In einer Ebene sei ein bei A rechtwinkeliges Dreieck ABC, und ausserhalb derselben sei ein Punkt P so gegeben,

dass PA auf AB und PC auf AC senkrecht stehe. Man soll beweisen, dass PC auf dieser Ebene senkrecht steht.

7. Auf einer Geraden lassen sich in demselben Punkte unendlich viele senkrechte Gerade errichten; dieselben liegen in einer Ebene, und diese ist senkrecht zu jener Geraden.

8. Durch eine Gerade PA seien drei Ebenen gelegt, und in jeder dieser Ebenen sei über PA ein Dreieck construirt, so dass diese Dreiecke PBA, PCA, PDA einander congruent sind, die gleichen Winkel an je demselben Endpunkt von PA liegen, und $PA : AB : PB = 3 : 4 : 5$ ist. Man beweise, dass die Seiten AB, AC, AD in einer und derselben Ebene liegen.

9. Sind die von zwei Punkten auf eine Ebene gefällten senkrechten Geraden gleichlang, so bilden diese Punkte mit den Fusspunkten der Senkrechten die Eckpunkte eines Rechtecks.

10. Zwei sich kreuzende Linien können nicht gleichzeitig auf derselben Ebene senkrecht stehen.

11. Zwei Linien, welche auf einer Geraden in verschiedenen Punkten senkrecht stehen, sind nicht nothwendig parallel; sind sie nicht parallel, so kreuzen sie sich.

12. Fällt man von beliebig vielen Punkten einer Geraden senkrechte Linien auf eine Ebene, so liegen die Fusspunkte dieser Senkrechten in einer Geraden.

13. Alle auf einer Ebene senkrechten Geraden, deren Fusspunkte in gerader Linie liegen, gehören einer Ebene an.

14. Schneidet eine Linie die eine von zwei parallelen Linien im Raume, so schneidet sie entweder auch die andere, oder kreuzt sich mit ihr.

15. Der Abstand des Halbirungspunktes einer Strecke von einer Ebene ist das arithmetische Mittel aus den Abständen der Endpunkte dieser Strecke von derselben Ebene.

b. Constructions-Aufgaben.

16. Durch einen gegebenen Punkt einer Geraden die zu dieser senkrechte Ebene zu legen. Vergl. 7 oder 8.

17. Durch einen ausserhalb einer Geraden gegebenen Punkt die zu derselben senkrechte Ebene zu legen.

18. Einen Punkt zu construiren, der von vier nicht in einer Ebene liegenden gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist. 2, 3.

19. Einen Punkt zu construiren, der von drei gegebenen,

nicht in gerader Linie liegenden Punkten eine und dieselbe gegebene Entfernung hat. 2.

20. In einer gegebenen Ebene einen Punkt zu bestimmen, der von drei gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Punkten gleichweit absteht.

21. Den geometrischen Ort des Punktes einer Ebene zu construiren, der von einem ausserhalb der Ebene gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat. 5.

22. Den geometrischen Ort des Punktes zu construiren, der von zwei gegebenen Punkten dieselbe gegebene Entfernung hat. 3, 21.

23. In einer Ebene eine Gerade so zu ziehen, dass jeder ihrer Punkte von zwei ausserhalb der Ebene gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist. 3.

24. In einer Ebene durch einen in ihr gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche von einem ausserhalb der Ebene gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung hat. 21.

25. In einer Ebene eine Gerade zu ziehen, welche einer anderen, gegebenen Geraden dieser Ebene parallel ist und von einem ausserhalb der Ebene gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung hat. 21.

26. In einer Ebene eine Gerade zu ziehen, welche von jedem von zwei ausserhalb der Ebene gegebenen Punkten eine gegebene Entfernung hat. 21.

27. Eine Gerade zu construiren, welche von drei gegebenen parallelen, aber nicht in einer Ebene liegenden Geraden gleichweit entfernt ist.

28. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen, welche zwei gegebene, sich kreuzende Linien schneidet.

29. Den geometrischen Ort des Punktes X zu bestimmen, für welchen die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten A, B $(AX^2 - BX^2)$ einen gegebenen constanten Werth m^2 hat.

30. In einer Ebene sind die Fusspunkte zweier von den Endpunkten einer gegebenen Strecke auf die Ebene gefällten senkrechten Geraden gegeben; ausserdem sind die Längen dieser Senkrechten bekannt. Man construire in der Ebene den Durchschnittspunkt der Verlängerung jener Strecke mit dieser Ebene, sowie die Länge der Strecke.

31. In einer Ebene sind die Fusspunkte der drei senkrechten Geraden gegeben, welche von den Eckpunkten eines ganz ausserhalb dieser Ebene liegenden Dreiecks auf dieselbe gefällt sind; ausserdem kennt man die Längen jener Senkrechten. Man construire in der Ebene ein jenem ersteren congruentes Dreieck. 30.

c. Rechnungs-Aufgaben.

α. Ohne trigonometrische Functionen.

α 32. Den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu berechnen, wenn sein Abstand von einem Punkte der Ebene gleich a und die Entfernung dieses Punktes vom Fusspunkt der zu ersterem gehörigen Senkrechten gleich b gegeben ist. α) $a=11{,}38$; $b=4{,}62$; β) $a=185\frac{1}{10}$; $b=182\frac{2}{5}$.

33. Eine Gerade steht im Mittelpunkt eines Kreises senkrecht zu der Ebene desselben, der Radius des Kreises ist gleich r und der Abstand eines Punktes der Senkrechten vom Mittelpunkt gleich a gegeben. Wie weit ist dieser Punkt von jedem Punkte der Peripherie entfernt? α) $r=4$, $a=31\frac{1}{8}$; β) $r=8$, $a=11\frac{11}{20}$.

34. Von einem Punkte sind nach einer Ebene zwei Linien gezogen. Man soll aus den Längen a, b derselben und dem Verhältniss $m:n$ der Abstände ihrer Fusspunkte vom Fusspunkt der zugehörigen Senkrechten die Länge dieser letzteren berechnen. α) $a=221$, $b=29$, $m:n=11:1$; β) $a=143$, $b=157$, $m:n=11:17$.

35. Die Entfernungen zweier Punkte von einer Ebene sind bezüglich gleich a und b gegeben; der Abstand der Fusspunkte der zugehörigen Senkrechten ist gleich c. Wie weit sind jene beiden Punkte von einander entfernt? α) $a=1\frac{5}{6}$, $b=1\frac{3}{20}$, $c=1$; β) $a=28{,}5$, $b=9{,}6$, $c=34$.

36. Auf der Ebene eines rechtwinkeligen Dreiecks sei im Scheitel des rechten Winkels eine senkrechte Gerade gleich c errichtet; die Entfernungen ihres oberen Endpunktes von den Endpunkten der Hypotenuse seien bezüglich gleich a und b. Wie lang ist die Hypotenuse? α) $a=3$, $b=3$, $c=1$; β) $a=16$, $b=25$, $c=20$.

37. Im Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks sei auf der Ebene desselben eine senkrechte Gerade gleich c errichtet, und es

sei die Entfernung des oberen Endpunktes der Senkrechten von einem Eckpunkt des Dreiecks gleich b gemessen. Man berechne den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks, sowie den Flächeninhalt eines derjenigen Dreiecke, deren Grundlinie eine Seite des ersteren und deren Spitze der obere Endpunkt der Senkrechten ist.

38. Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene soll nach derselben eine Gerade von gegebener Länge a gezogen werden. Wie lang muss die von jenem Punkte auf die Ebene gefällte Senkrechte sein, wenn der Abstand jener Geraden von dem Fusspunkt dieses Perpendikels möglichst gross sein soll?

39. Die Endpunkte einer gegebenen Strecke haben von einer gegebenen Ebene bezüglich die Abstände a und b. Man berechne den Abstand desjenigen Punktes von der Ebene, welcher jene Strecke in dem gegebenen Verhältniss $m : n$ theilt. (Zwei Fälle.)

β. Mit trigonometrischen Functionen.

40. Von einem Punkte P ausserhalb einer Ebene gehen β nach letzterer gerade Linien, welche sämmtlich mit der von P auf die Ebene gefällten senkrechten Geraden den Winkel α bilden und gleich a sind. Wie weit ist jener Punkt von der Ebene entfernt? α) $a = 229$, $\alpha = 15^0\,11'\,30''$; β) $a = 11{,}24$, $\alpha = 72^0\,55'\,37''$.

41. Auf einer Ebene steht eine senkrechte Gerade von der Länge p; um ihren Fusspunkt ist in der Ebene ein Kreis mit dem Radius r beschrieben. Welchen Winkel bildet die Verbindungslinie eines Punktes der Peripherie und des oberen Endpunktes der Senkrechten mit dieser? $p = 4{,}5354$, $r = 8$.

42. Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene sind nach dieser eine senkrechte und eine schiefe Linie gezogen, und es verhält sich die erstere zur letzteren wie $a : b$. Welchen Winkel bilden beide Linien mit einander? $a : b = 3059 : 8944$.

43. Wie gross ist die Entfernung zweier Punkte von einander, deren Abstände von einer Ebene bezüglich gleich a und b sind, und deren Verbindungslinie mit den von ihnen auf die Ebene gefällten senkrechten Geraden den spitzen Winkel α bildet? $a = 2\frac{2}{3}$, $b = \frac{60}{103}$, $\alpha = 21^0\,30'$.

§. 2. Von Geraden, welche zu einer Ebene schief stehen.

a. Lehrsätze.

1. Zwei Punkte sind von einer Ebene gleichweit entfernt, wenn zwei von ihnen nach der Ebene unter gleichen Neigungswinkeln gegen dieselbe gezogene Gerade einander gleich sind.

2. Umkehrung 1: Zieht man von Punkten, welche gleichweit von einer Ebene abstehen, nach dieser gerade Linien unter gleichen Neigungswinkeln gegen dieselbe, so sind diese schiefen Linien gleich lang.

3. Umkehrung 2: Schiefe Linien von gleicher Länge, welche von demselben Punkte, oder von Punkten, die gleichweit von einer Ebene abstehen, nach dieser Ebene gezogen sind, haben gegen dieselbe gleiche Neigungswinkel. — Welcher entsprechende Satz gilt bei ungleichen Längen der schiefen Linien?

4. Legt man durch den Mittelpunkt eines Kreises eine zu seiner Ebene schiefe Gerade, so ist von allen möglichen Verbindungslinien zwischen einem und demselben Punkt der Geraden und den Punkten der Kreislinie diejenige die kürzeste, deren Fusspunkt auf dem Neigungsschenkel liegt, und je zwei dieser Linien, deren Fusspunkte so liegen, dass die nach ihnen gezogenen Radien gleiche Winkel mit dem Neigungsschenkel bilden, sind gleich lang. Bilden dagegen die nach den Fusspunkten gezogenen Radien ungleiche Winkel mit dem Neigungsschenkel, so gehört zu dem grösseren Winkel die längere Gerade. Welche von allen diesen Verbindungslinien ist die längste? — Umkehrungen.

5. Fällt man von einem Punkte einer schiefen Geraden auf jede von zwei Geraden, die in der Ebene ihres Neigungsschenkels mit diesem gleiche Winkel bilden, eine senkrechte Gerade, so sind diese Senkrechten einander gleich. Bilden dagegen jene zwei Geraden mit dem Neigungsschenkel ungleiche Winkel, so hat diejenige, welche den grösseren Winkel bildet, auch den grösseren Abstand von dem Punkte der schiefen Geraden.

6. In einer Ebene sei ein gleichschenkeliges Dreieck gegeben, und eine die Ebene schneidende schiefe Gerade stehe in der Mitte seiner Grundlinie zu dieser senkrecht; man soll beweisen, dass die Höhe des Dreiecks der Neigungsschenkel der schiefen Linie ist.

7. Sind mehrere eine Ebene schneidende gerade Linien einander parallel, so sind auch ihre Neigungsschenkel einander parallel.

8. Linien, welche gegen eine Ebene gleiche Neigungswinkel haben und deren Neigungsschenkel parallel und gleichgerichtet sind, sind unter einander parallel.

9. Sind die Seiten eines Dreiecks im Raume bezüglich den Seiten eines anderen Dreiecks parallel, so sind die beiden Dreiecke einander ähnlich, und die Verbindungslinien je zweier homologen Eckpunkte schneiden sich in demselben Punkt, oder sind einander parallel. Unter welcher Bedingung tritt der letztere Fall ein? — Gilt ein entsprechender Satz für zwei n-Ecke?

10. Alle Linien, welche auf einer gegebenen Geraden in demselben Punkte senkrecht stehen, haben ihre Neigungsschenkel gegen eine durch jene Gerade gehende Ebene in derselben geraden Linie.

11. Der geometrische Ort des Endpunktes einer Geraden, welche eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte derselben und unter einem gegebenen Neigungswinkel trifft, und welche von diesem Punkte aus eine gegebene Länge hat, ist eine Kreislinie.

12. Ist eine von einem Punkte nach einer Ebene gezogene Gerade doppelt so lang, als das von demselben Punkte auf die Ebene gefällte Neigungsloth, so beträgt ihr Neigungswinkel gegen die Ebene den dritten Theil eines rechten Winkels.

13. Wenn zwei gerade Linien einander schneiden, so giebt es stets unendlich viele Linien, welche die beiden ersteren in ihrem Durchschnittspunkt treffen und gleiche Winkel mit ihnen bilden.

14. Bildet eine Gerade, welche eine Ebene schneidet, mit zweien durch ihren Fusspunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden gleiche Winkel, so sind diese Winkel stets grösser als die Hälfte des von den beiden Linien in der Ebene gebildeten hohlen Winkels und kleiner als der Nebenwinkel dieser Hälfte.

b. Constructions-Aufgaben.

15. Von einem ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt eine Gerade nach derselben zu ziehen, welche einen gegebenen Neigungswinkel gegen die Ebene hat, a) allgemein, b) so, dass sie eine durch den Fusspunkt der von jenem Punkte auf die Ebene gefällten Senkrechten in dieser Ebene gezogene Gerade trifft,

c) so, dass ihr Neigungsschenkel einer in der Ebene gegebenen Geraden parallel ist.

16. Durch einen in einer Ebene gegebenen Punkt eine Gerade unter einem gegebenen Neigungswinkel gegen die Ebene zu legen, so dass ihr Neigungsschenkel einer in der Ebene gegebenen Geraden parallel ist.

17. Durch eine gegebene Linie eine Ebene in gegebenem Abstand von einem gegebenen Punkte zu legen.

18. Eine Gerade zu construiren, welche eine gegebene Ebene unter einem gegebenen Neigungswinkel schneide und auf einer in dieser Ebene gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte derselben senkrecht stehe.

19. Durch den Scheitel eines gegebenen Winkels eine Gerade zu legen, welche mit den Schenkeln desselben gleiche Winkel bilde und zu der Ebene desselben einen gegebenen Neigungswinkel habe.

20. Durch den Fusspunkt einer gegebenen Geraden mit einer gegebenen Ebene in dieser eine gerade Linie zu ziehen, welche mit der ersteren einen gegebenen Winkel bilde.

21. Durch einen Schenkel eines gegebenen Winkels eine Ebene so zu legen, dass der andere Schenkel einen gegebenen Neigungswinkel gegen dieselbe habe.

c. Rechnungs-Aufgaben.

α 22. Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene, dessen Entfernung von derselben gleich a ist, sei nach der Ebene eine Linie unter einem Neigungswinkel von 45^0 gezogen; wie lang ist dieselbe?

23. Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene ist nach dieser eine Linie von der Länge a unter einem Neigungswinkel von 30 Grad gezogen; wie gross ist der Abstand des Punktes von der Ebene?

24. Durch einen Eckpunkt eines Dreiecks ABC ist eine zu der Ebene desselben schief stehende und mit den anliegenden Seiten AB, AC gleiche Winkel bildende Linie gezogen. Wie lang ist das innerhalb des Dreiecks liegende Stück ihres Neigungsschenkels, wenn $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ gegeben sind? $a = 40$, $b = 25$, $c = 16$.

25. Zwei rechtwinkelige Dreiecke, welche eine Kathete gemeinschaftlich haben, liegen so im Raume, dass die zweite Kathete des einen senkrecht auf der Hypotenuse des anderen steht. Man soll aus der Hypotenuse a des ersteren und der nicht gemeinschaftlichen Kathete b des letzteren die Entfernung ihrer nicht gemeinschaftlichen Eckpunkte berechnen. $a = 1{,}2$; $b = 1{,}6$.

26. Welchen Winkel bildet eine Gerade, die gegen eine Ebene unter einem Winkel von 45^0 geneigt ist, mit einer Geraden, welche in dieser Ebene durch ihren Fusspunkt unter einem Winkel von ebenfalls 45^0 gegen den Neigungsschenkel gezogen ist?

27. Eine Strecke, deren Länge gleich a gegeben ist, sei β gegen eine Ebene unter dem Winkel φ geneigt. Wie lang ist die Projection dieser Strecke auf die Ebene? $a = 5581$, $\varphi = 44^0 20'$.

28. Eine gegen eine Ebene geneigte Strecke verhalte sich zu ihrer Projection auf diese Ebene wie $a : b$; man berechne ihren Neigungswinkel gegen die letztere. $a : b = 4007 : 3114$.

29. Von einem Punkt, dessen Abstand von einer Ebene gleich a ist, sei nach dieser eine Gerade unter dem Neigungswinkel φ gezogen; wie lang ist dieselbe? $a = 64{,}92$, $\varphi = 62^0 39'$.

30. Auf einer Ebene sind in zwei Punkten, deren Abstand von einander gleich a ist, senkrechte Linien errichtet und bezüglich gleich b und c gemacht. Welchen Neigungswinkel hat die Verbindungslinie der nicht in der Ebene liegenden Endpunkte der Senkrechten gegen die Ebene? $a = 8{,}442$; $b = 8$; $c = 5{,}257$.

31. Eine Gerade ist gegen eine Ebene unter dem Winkel α geneigt, und durch ihren Fusspunkt ist in der Ebene eine Gerade unter dem Winkel β gegen ihren Neigungsschenkel gezogen. Welchen Winkel bildet die erstere Gerade mit der letzteren? $\alpha = 43^0 53'$, $\beta = 11^0 10'$.

32. Eine Gerade bildet mit einer Linie einer Ebene den Winkel α, und diese Linie bildet mit dem Neigungsschenkel jener Geraden gegen die Ebene den Winkel β. Man berechne den Neigungswinkel der ersten Geraden. $\alpha = 8^0 1'$, $\beta = 5^0 40'$.

33. Die Fusspunkte zweier von einem Punkte ausserhalb einer Ebene nach dieser gezogenen Geraden haben von dem Fusspunkt der von demselben Punkte aus auf die Ebene gefällten Senkrechten Entfernungen, welche sich wie a zu b verhalten,

und ihre eigenen Längen verhalten sich zu einander, wie $m : n$. Man berechne ihre Neigungswinkel. $a : b = \sqrt{3} : 1$; $m : n = \sqrt{2} : 1$.

34. Von einem Punkte, der von einer Ebene die gegebene Entfernung h hat, sind nach der Ebene zwei schiefe Linien gezogen, deren Längen sich wie $m : n$ verhalten; der Neigungswinkel der einen beträgt das Doppelte des Neigungswinkels der anderen. Man soll die Längen der schiefen Linien berechnen. $h = 16$, $m : n = 17 : 30$.

35. Im Mittelpunkt des einem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises sei auf der Ebene desselben eine senkrechte Gerade von der Länge h errichtet. Welche Neigungswinkel haben die Verbindungslinien ihres oberen Endpunktes mit den Eckpunkten des Dreiecks gegen die Ebene? Die drei Seiten (a, b, c) des Dreiecks sind gegeben. $h = 62{,}382$; $a = 30$, $b = 5$, $c = 29$.

§. 3. Eine Ebene und eine zu ihr parallele Gerade.

a. Lehrsätze.

1. Errichtet man auf einer Ebene eine senkrechte Gerade und auf dieser in einem beliebigen Punkte wieder eine senkrechte Gerade, so ist die letztere der Ebene parallel.

2. Fällt man von einem Punkte einer Geraden, welche einer Ebene parallel ist, eine senkrechte Linie auf diese Ebene, so steht diese Linie auch senkrecht zu der ersteren Geraden.

3. Durch einen ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt lassen sich zu derselben unendlich viele parallele Gerade legen. Der geometrische Ort derselben ist eine Ebene.

4. Ist eine von mehreren einander parallelen Geraden einer Ebene parallel, so sind auch die anderen derselben parallel oder liegen ganz in ihr.

5. Schneidet eine von mehreren parallelen Geraden eine Ebene, so schneiden auch die anderen dieselbe.

6. Alle von einer Geraden auf eine ihr parallele Ebene gefällten senkrechten Linien liegen in einer Ebene und sind gleichlang. (Eine Gerade und eine ihr parallele Ebene haben überall dieselbe Entfernung von einander.)

7. Alle geraden Linien, welche unter sich parallel sind und eine Gerade mit einer ihr parallelen Ebene verbinden, sind ein-

ander gleich, und der geometrische Ort ihrer Fusspunkte ist eine jener Geraden parallele Linie.

8. Umgekehrt: lassen sich von zwei Punkten einer Geraden zwei gleiche und parallele Linien nach einer Ebene ziehen, so ist jene Gerade dieser Ebene parallel.

9. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so liegt jede Linie, welche durch einen Punkt der Ebene geht und zu der Geraden parallel ist, ganz in der Ebene.

10. Eine Linie, welche zu einer in einer gegebenen Ebene liegenden Linie a parallel ist, ist parallel zu jeder in dieser Ebene liegenden und zu a parallelen Geraden, kreuzt sich dagegen (falls sie nicht selbst in der Ebene liegt) mit jeder zu a nicht parallelen Geraden dieser Ebene.

11. Sind beide Schenkel eines Winkels einer Ebene parallel, und legt man durch jeden Schenkel eine diese Ebene schneidende Ebene, so ist der von den Durchschnittslinien in der ersteren gebildete Winkel dem gegebenen gleich.

b. Constructions-Aufgaben.

12. Den geometrischen Ort einer Geraden zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Ebene parallel gezogen werden kann.

13. Durch eine von zwei sich kreuzenden Geraden eine zu der anderen parallele Ebene zu legen.

14. Durch einen gegebenen Punkt eine zu zwei sich kreuzenden Geraden parallele Ebene zu legen.

15. Von einem zu bestimmenden Punkt der einen von zwei gegebenen sich kreuzenden Geraden nach der anderen eine Linie zu ziehen, welche einer dritten gegebenen Geraden parallel ist.

16. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die eine gegebene Gerade und eine dieser parallele gegebene Ebene so schneidet, dass das zwischen den letzteren liegende Stück derselben eine gegebene Länge habe.

17. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene in gegebenem Abstand von einer gegebenen Geraden zu legen.

c. Rechnungs-Aufgaben.

18. Ausserhalb einer Ebene ist eine derselben parallele Strecke von der Länge a und ein Punkt P gegeben; die von P a

auf die Strecke gefällte senkrechte Gerade ist gleich p, ihre Verlängerung über ihren Fusspunkt trifft die Ebene und hat bis zu ihrem Durchschnittspunkt mit dieser die Länge q. Wie weit sind die Fusspunkte der beiden von P aus durch die Endpunkte der Strecke (a) nach der Ebene gezogenen Geraden von einander entfernt? $a = 3{,}9$; $p = 5{,}2$; $q = 1{,}4$.

19. Die Seiten eines Dreiecks sind einer Ebene parallel, und die durch einen Punkt ausserhalb der Ebene und die Eckpunkte des Dreiecks gezogenen Geraden treffen die Ebene auf ihren Verlängerungen über diese Eckpunkte. Man soll den Flächeninhalt des durch die Fusspunkte dieser Linien in der Ebene bestimmten Dreiecks aus dem Flächeninhalt F des gegebenen und dem Verhältniss $p : q$ der Abschnitte einer der von dem Punkt nach der Ebene gezogenen Geraden berechnen.

β 20. Eine Strecke AB sei einer Ebene parallel, und von A sei eine Gerade $AA_1 = c$ unter dem Neigungswinkel α gegen die Ebene, und von B eine Strecke $BB_1 = d$ nach derselben gezogen. Man berechne den Neigungswinkel der letzteren Geraden gegen die Ebene. $c = 63{,}92$; $d = 54{,}47$; $\alpha = 51^0\,40'$.

21. In einer Ebene sei von zwei Punkten A, B, deren Entfernung von einander gleich a ist, nach den Endpunkten einer der Ebene parallelen Strecke CD visirt, und es seien die Neigungswinkel der Gesichtslinien gegen die Ebene, $CAE = \alpha$, $DAF = \delta$, $CBE = \gamma$, $DBF = \beta$, gemessen, endlich sei der Abstand der Linie CD von der Ebene gleich h gegeben. Man soll die Länge von CD berechnen. Beispiel: $a = h$, $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, $\alpha = 45^0$, $\beta = 30^0$.

22. Eine zu einer Ebene E senkrechte Gerade schneidet die eine von zwei zu E parallelen und einander kreuzenden Geraden in A, die andere in B. Es sei auf der ersteren dieser zwei Linien ein Punkt C, auf der letzteren ein Punkt D angenommen, und $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$, das von C auf E gefällte Perpendikel gleich d und das von D auf E gefällte gleich e gemessen. Man berechne den Winkel der Durchschnittslinien, welche zwei bezüglich durch je eine der sich kreuzenden Geraden gelegte Ebenen in E bilden.

II. Capitel. Verbindung zweier Ebenen mit einander.

§. 4. Zwei sich schneidende Ebenen.

a. Lehrsätze.

Flächenwinkel überhaupt.

1. Jeder Neigungsschenkel eines Flächenwinkels ist zugleich der Neigungsschenkel des anderen Schenkels gegen die betreffende Ebene.

2. Die Ebene des Neigungswinkels eines Flächenwinkels ist senkrecht zu der Kante desselben.

3. Umgekehrt: jede zu der Kante zweier Ebenen senkrechte Ebene schneidet dieselben in den Schenkeln eines Neigungswinkels.

4. Zwei einander schneidende Ebenen stehen senkrecht zu der Ebene ihres Neigungswinkels.

5. Halbirt man einen Flächenwinkel und den zu ihm gehörigen Nebenwinkel (der durch Erweiterung einer Schenkelebene über die Kante entsteht), so stehen die Halbirungsebenen senkrecht zu einander.

6. Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei gegebenen, sich schneidenden Ebenen gleichweit absteht, wird gebildet von den Halbirungsebenen der Flächenwinkel der ersteren Ebenen.

7. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei sich schneidenden Ebenen in einem gegebenen Verhältniss stehen, wird von zwei durch die Durchschnittslinie der beiden Ebenen gehenden Ebenen gebildet.

8. Steht eine Gerade senkrecht auf einer von zwei sich schneidenden Ebenen, so ist ihr Neigungswinkel gegen die andere das Complement des Neigungswinkels der beiden Ebenen gegen einander.

9. Fällt man von einem Punkt innerhalb eines Flächenwinkels auf jede Ebene des letzteren eine senkrechte Gerade, so ist der Winkel dieser beiden Geraden das Supplement des (Neigungswinkels des) Flächenwinkels. Liegt dagegen jener Punkt so ausserhalb des Flächenwinkels, dass die beiden Senkrechten die Schenkelebenen selbst (nicht deren Erweiterung über die Kante) treffen, so ist der Winkel der Senkrechten gleich dem Neigungswinkel des Flächenwinkels. — Welcher entsprechende Satz gilt

über die von zwei Geraden gebildeten Winkel, welche bezüglich auf den Ebenen in einem Punkte ihrer Kante senkrecht stehen? — Untersuchung der sonstigen Fälle.

Senkrechte Ebenen.

10. Die durch eine zu einer Ebene schief stehende Linie und ihren Neigungsschenkel gelegte Ebene steht senkrecht zu der ersteren Ebene.

11. Stehen eine Ebene und eine ausserhalb derselben liegende Gerade zu einer anderen Ebene senkrecht, so sind sie einander parallel. Welche Umkehrungen gestattet dieser Satz?

12. Zu einer Ebene lässt sich durch eine in ihr gegebene Gerade nur eine einzige senkrechte Ebene legen.

13. Fällt man von einem Punkte einer Ebene eines Flächenwinkels eine Gerade senkrecht auf die andere Ebene und von dem Fusspunkt dieser Senkrechten das Perpendikel auf die Kante desselben, so steht die Verbindungslinie des zuerst angenommenen Punktes und des Fusspunktes des letzteren Perpendikels senkrecht zu der Kante.

14. Umgekehrt: fällt man von einem Punkte der einen Ebene eines Flächenwinkels auf die Kante und auf die andere Ebene senkrechte Geraden, so steht die Verbindungslinie der Fusspunkte der beiden Perpendikel ebenfalls senkrecht zur Kante. Daher bildet sie mit der einen von jenen Senkrechten den Neigungswinkel der beiden Ebenen. — Gestattet der Lehrsatz 13 noch eine andere Umkehrung?

15. Fällt man von einem Punkte auf jede von zwei einander schneidenden Ebenen eine senkrechte Gerade und von den Fusspunkten dieser Geraden wieder Senkrechte auf die Kante der Ebenen, so treffen die zuletzt genannten Perpendikel die Kante in demselben Punkt.

16. Der geometrische Ort einer zu einer Ebene senkrechten Geraden, deren Fusspunkt in einer in dieser Ebene gegebenen geraden Linie liegt, ist eine zu der ersteren senkrechte Ebene.

17. Durch eine gegebene Gerade lässt sich zu einer gegebenen Ebene stets eine, und wenn die Gerade nicht senkrecht zu der Ebene steht, nur eine einzige senkrechte Ebene legen. (Projicirende Ebene; Projection einer Geraden auf eine Ebene.)

18. Von einer geraden Linie seien die Projectionen auf zwei zu einander senkrechte Ebenen gegeben. Errichtet man im Durchschnittspunkt einer dieser Projectionen mit der Kante der

Ebenen auf letzterer in der Ebene der anderen Projection die senkrechte Gerade, so trifft diese die andere Projection in dem Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden selbst mit der betreffenden Ebene.

19. Eine Gerade, welche auf der Halbirungsebene eines Flächenwinkels senkrecht steht, hat gegen die beiden Schenkelebenen gleiche Neigungswinkel, und das zwischen den Schenkelebenen liegende Stück derselben wird durch die Halbirungsebene halbirt. — Umkehrungen.

20. Stehen die Schenkelebenen eines Flächenwinkels bezüglich auf den Schenkelebenen eines zweiten mit der vorigen paralleler Kante (nicht auf den Erweiterungen dieser Schenkelebenen) senkrecht, so sind die Flächenwinkel einander gleich, oder sie ergänzen sich zu zwei Rechten.

b. Constructions-Aufgaben.

21. Einen gegebenen Flächenwinkel in 2 oder 4, 8, ... 2^n gleiche Theile zu theilen.

22. Durch eine gegen eine Ebene schief stehende Gerade eine zu jener senkrechte Ebene zu legen.

23. Durch eine einer gegebenen Ebene parallele Linie eine zu jener senkrechte Ebene zu legen.

24. An eine gegebene Ebene durch eine in derselben gegebene Linie eine zweite Ebene unter einem gegebenen Flächenwinkel gegen die erstere zu legen.

25. Durch einen ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt eine zweite Ebene senkrecht zu der ersteren zu legen, so dass sie einer gegebenen Geraden parallel ist.

26. Durch einen ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt eine zu derselben senkrechte Ebene zu legen, welche zugleich auf einer gegebenen, der ersteren Ebene parallelen Geraden senkrecht steht.

27. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen sich schneidenden Ebenen gleichweit entfernt ist.

28. Diejenigen Punkte in einer gegebenen Ebene zu bestimmen, deren Abstände von zwei anderen gegebenen, sich schneidenden Ebenen in einem gegebenen Verhältniss stehen.

29. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen

welche gegen zwei gegebene sich schneidende Ebenen gleiche Neigungswinkel hat.

30. Den Winkel zweier gegen einander convergenten Ebenen zu halbiren, ohne die Durchschnittslinie derselben zu benutzen.

31. Durch einen Punkt ausserhalb zweier sich schneidenden Ebenen eine dritte Ebene zu legen, welche zu jeder der beiden ersteren senkrecht steht.

32. Einen gegebenen rechten Flächenwinkel in 3 gleiche Theile zu theilen.

33. Durch eine gegebene Gerade zehn Ebenen zu legen, so dass die Flächenwinkel je zweier benachbarter sämmtlich einander gleich sind.

c. Rechnungs-Aufgaben.

α 34. Die von einem Punkte einer Ebene auf eine zweite Ebene gefällte senkrechte Linie sei halb so gross als das von demselben Punkte auf die Durchschnittslinie der Ebenen gefällte Perpendikel. Man berechne den Winkel der beiden Ebenen.

35. Eine Gerade ist zwischen zwei sich schneidenden Ebenen so gezogen, dass sie mit denselben gleiche und in derselben dritten Ebene liegende Winkel bildet; ihre Endpunkte haben von der Kante den Abstand a, und die Länge der Geraden ist gleich b. Wieviel beträgt der kürzeste Abstand der Geraden von der Kante? $a = 305$, $b = 414$.

36. Zwei gerade Linien sind auf einer Ebene senkrecht errichtet und bis zum Durchschnitt mit einer dieselbe schneidenden Ebene gezogen; die Fusspunkte derselben haben von der Kante bezüglich die Abstände a und a', die Länge der ersteren Senkrechten ist gleich b. Man berechne die Länge der anderen. $a = 7{,}91$; $a' = 5{,}65$; $b = 7{,}28$.

37. Eine Gerade schneidet zwei zu einander senkrechte Ebenen, und es sind die Abstände der Durchschnittspunkte von der Kante bezüglich gleich a und b und das zwischen den betreffenden Senkrechten liegende Stück der Kante gleich c gegeben. Wie lang ist jene Gerade? $a = 16$, $b = 12$, $c = 21$.

β 38. Auf einer von zwei Ebenen, welche mit einander den Flächenwinkel α bilden, ist in der Entfernung a von der Kante eine senkrechte Gerade bis zur anderen Ebene errichtet. Wie lang ist dieselbe? $a = 6{,}036$; $\alpha = 41^0\ 55'$.

39. Um den Neigungswinkel φ zweier Ebenen zu bestimmen, ist in einer zu der Kante derselben senkrechten Ebene eine Gerade zwischen den ersteren Ebenen gezogen und die Länge a dieser Geraden nebst den Abständen b, c ihrer Endpunkte von der Kante gemessen. Man berechne φ. $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = 1 + \sqrt{3}$.

40. Eine Gerade schneidet zwei Ebenen, die mit einander den Flächenwinkel φ bilden, bezüglich unter den Neigungswinkeln α und β; wie verhalten sich die Abstände ihrer Durchschnittspunkte mit den Ebenen von der Kante derselben zu der Länge der Geraden? $\alpha = 59^0\,29'\,8'',6$; $\beta = 53^0\,7'\,48'',4$; $\varphi = 67^0\,23'$.

41. Von den Eckpunkten eines Dreiecks sind senkrechte Linien auf eine Ebene gefällt; man soll aus dem Flächeninhalt F des Dreiecks und dem Winkel φ, den seine Ebene mit der anderen Ebene bildet, den Flächeninhalt des durch die Fusspunkte der Senkrechten bestimmten Dreiecks (der sog. Projection des gegebenen Dreiecks auf die Ebene) berechnen. $F = 2500$, $\varphi = 73^0\,20'$.

42. Dieselbe Aufgabe, wie in 41, für ein n-Eck zu lösen. $F = 13{,}7$; $\varphi = 26^0\,2'$.

43. Von einem Punkte O sind nach einer Ebene E zwei Gerade OA, OB gezogen. Wie gross ist der Neigungswinkel der Ebene OAB gegen die Ebene E, wenn der Winkel AOB gleich 90^0 und die Neigungswinkel von OA und OB gegen E entsprechend gleich α und β gegeben sind? $\alpha = 30^0$, $\beta = 35^0\,28'\,33''$.

44. Eine Gerade, deren Länge gleich l gegeben ist, hat gegen die eine von zwei sie begrenzenden Ebenen den Neigungswinkel α, gegen die andere den Neigungswinkel β, und der Abschnitt der Kante beider Ebenen, welcher zwischen den Senkrechten liegt, die man von ihren Durchschnittspunkten mit der Linie auf die Kante fällen kann, ist gleich p. Man soll den Neigungswinkel der beiden Ebenen berechnen.

45. Parallel zu der Durchschnittslinie zweier Ebenen, die mit einander einen Winkel gleich φ bilden, sei in der einen eine Strecke gleich a gezogen, und über dieser letzteren als Basis sei ein gleichschenkeliges Dreieck construirt, dessen Ebene mit derjenigen, in welcher a liegt, den Winkel δ bildet, und dessen Spitze in der anderen Ebene in einem Abstand gleich d von der

Durchschnittslinie liegt. Man berechne den Schenkel, die Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks. $a = 120$, $\varphi = 51^0\,40'$, $\delta = 38^0\,9'$, $d = 174{,}032$.

46. Die senkrechten Projectionen einer Geraden auf zwei zu einander senkrechte Ebenen sind bezüglich gleich p und q, und die erstere bilde mit der Kante den Winkel α. Man soll die Länge der — durch die beiden Ebenen begrenzten — Geraden und ihre Neigungswinkel gegen die Ebenen berechnen. $p = 15{,}762$, $q = 10{,}466$, $\alpha = 58^0\,12'$.

47. Die Durchschnittspunkte einer Geraden mit zwei zu einander senkrechten Ebenen haben von der Axe derselben Abstände, welche sich wie $m : n$ verhalten, und die Projectionen der Geraden auf die Ebenen verhalten sich bezüglich wie $p : q$. Welche Neigungswinkel bildet die Gerade mit den Ebenen? $m : n = \sqrt{6} : 2$; $p : q = 2 : \sqrt{2}$.

48. Die Schenkel eines Winkels, dessen Grösse gleich α gemessen ist, bilden mit einer horizontalen Ebene die Winkel β und γ. Man berechne den Winkel, welchen die Projectionen der Schenkel auf die horizontale Ebene mit einander bilden, sowie den Neigungswinkel der Ebene des ersteren Winkels gegen den Horizont. $\alpha = 134^0\,38'\,50'',8$; $\beta = 15^0\,4'\,0''$; $\gamma = 11^0\,17'\,0''$.

§. 5. Zwei parallele Ebenen.

a. Lehrsätze.

1. Ist eine Ebene einer anderen parallel, so ist auch jede in ihr liegende Gerade der letzteren parallel.

2. Alle durch denselben Punkt ausserhalb einer Ebene zu dieser parallel gezogenen Geraden liegen in einer und derselben parallelen Ebene.

3. Schneidet eine Gerade die eine von zwei parallelen Ebenen, so schneidet sie (wenn nöthig, verlängert) auch die andere.

4. Ist eine Gerade der einen von zwei parallelen Ebenen parallel, so ist sie auch der anderen parallel, oder liegt ganz in ihr. Vergl. 3.

5. Sind drei oder mehr Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, gleichweit von einer Ebene entfernt, und befinden sie sich auf derselben Seite dieser Ebene, so liegen sie in einer zu ihr parallelen Ebene.

6. Zwei Ebenen, welche von drei nicht in einer Ebene liegenden parallelen Geraden gleiche Stücke abschneiden, sind parallel.

7. Ist eine Gerade jeder von zwei einander schneidenden Ebenen parallel, so ist sie auch der Durchschnittslinie derselben parallel.

8. Durch ein Paar sich kreuzender Linien lässt sich stets ein und nur ein Paar paralleler Ebenen legen (d. h. durch jede Linie je eine Ebene). Eine zu den beiden Linien zugleich senkrechte Gerade (der Abstand derselben) ist gleich dem Abstand der beiden Ebenen.

9. Ist eine gerade Linie einer Ebene parallel, so hat sie von jeder ihr nicht parallelen Geraden dieser Ebene denselben Abstand, wie von der Ebene selbst. Vergl. 8.

10. Durch Verbindung der Durchschnittspunkte, in welchen zwei parallele Ebenen von parallelen Linien geschnitten werden, entstehen zwei congruente, in je einer dieser Ebenen liegende Figuren.

11. Zieht man von einem Punkte aus drei gerade Linien, welche nicht in einer Ebene liegen, nach zwei parallelen Ebenen, und verbindet ihre Durchschnittspunkte mit denselben durch in diesen Ebenen liegende gerade Linien, so erhält man ähnliche Dreiecke.

12. Aehnliche Dreiecke (oder Polygone) in parallelen Ebenen lassen sich stets in eine solche Lage zu einander gebracht denken, dass je zwei homologe Seiten einander parallel sind.

13. Sind je zwei homologe Seiten zweier in parallelen Ebenen liegenden Dreiecke einander parallel, so schneiden sich die geraden Verbindungslinien je zweier homologen Eckpunkte in einem und demselben Punkt.

14. Zieht man von einem Punkte nach allen Eckpunkten eines ebenen Polygons gerade Linien und theilt alle diese Verbindungslinien durch Punkte, welche entweder sämmtlich auf diesen Linien selbst oder sämmtlich auf ihren Verlängerungen nach derselben Seite hin liegen, in gleichem Verhältniss, so bilden die Theilpunkte die Eckpunkte eines dem gegebenen ähnlichen Polygons, dessen Ebene der Ebene des ersteren parallel ist.

b. Constructions-Aufgaben.

15. Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, welcher von einer gegebenen Ebene eine gegebene Entfernung hat.

16. Den geometrischen Ort eines Punktes von der Eigenschaft zu bestimmen, dass die von ihm nach einer gegebenen Ebene und parallel zu einer gegebenen Geraden gezogene Linie eine gegebene Länge habe.

17. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche gleichweit von drei (nicht in gerader Linie liegenden) gegebenen Punkten absteht.

18. Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen parallelen Ebenen gleichweit absteht.

19. Eine Gerade zu construiren, welche von jeder von zwei gegebenen nicht parallelen Ebenen eine gegebene Entfernung hat.

20. Auf einer zwischen zwei parallelen Ebenen gegebenen Geraden den von beiden Ebenen gleichweit entfernten Punkt zu bestimmen.

21. Von einem ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt nach dieser eine Gerade von verlangter Länge parallel zu einer anderen gegebenen Ebene zu ziehen.

22. Ebenso, wenn statt der Länge der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene gegeben ist.

23. Mit Hilfe paralleler Ebenen zu einer Geraden durch einen ausserhalb derselben gegebenen Punkt eine senkrechte Ebene zu legen.

24. Ebenso eine Ebene, zu welcher die gegebene Gerade einen der Grösse nach gegebenen Neigungswinkel hat.

25. Durch eine parallel zu einer Ebene gegebene Gerade eine Ebene unter gegebenem Winkel gegen die erstere zu legen.

26. In einer von zwei parallelen Ebenen sei eine geradlinige Figur, in der anderen eine Strecke parallel zu einer Seite dieser Figur construirt. Man soll in der zweiten Ebene eine ähnliche Figur zeichnen, so dass die gegebene Strecke die der parallelen Seite homologe werde; dabei soll in der zweiten Ebene keine Neben-Construction vorgenommen werden.

27. Zu zwei sich kreuzenden Geraden eine dritte Gerade zu construiren, welche auf jeder von ihnen senkrecht steht.

28. Die kürzeste von allen Linien zu construiren, die sich zwischen zwei gegebenen sich kreuzenden Geraden ziehen lassen.

29. In einer von zwei gegebenen sich kreuzenden Geraden den Punkt zu bestimmen, welcher von der anderen einen gegebenen Abstand hat.

30. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche einer gegebenen Ebene parallel ist und von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat. Vergl. 8.

31. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche von zwei gegebenen sich kreuzenden Linien gegebene Abstände hat. 8.

32. Eine Ebene zu construiren, welche von vier gegebenen, nicht in einer Ebene liegenden Punkten gleichweit absteht.

c. Rechnungs-Aufgaben.

33. Zwischen zwei parallelen Ebenen ist eine senkrechte α und eine schiefe Linie gezogen; die Länge der ersteren ist gleich a, die Abstände der Fusspunkte in je einer der Ebenen sind bezüglich gleich b und c gegeben, und die Projection der schiefen Linie auf die eine Ebene steht senkrecht zu der gleich b gegebenen Verbindungslinie. Wie lang ist die schiefe Linie? $a = 1{,}5$; $b = 32{,}3$; $c = 32{,}5$.

34. Die Verbindungslinie der Scheitelpunkte zweier rechten Winkel, deren Schenkel paarweise nach derselben Richtung parallel laufen, stehe senkrecht zu den Ebenen der Winkel und sei gleich c gegeben. Auf dem einen Schenkel des einen Winkels sei vom Scheitelpunkt aus eine Strecke gleich a, auf dem ihm nicht parallelen des anderen ebenso eine Strecke gleich b abgetragen; man berechne die Länge der Verbindungslinie der Endpunkte dieser Strecken. $a = 48$, $b = 20$, $c = 165$.

35. Zwischen zwei parallelen Ebenen, deren senkrechter β Abstand gleich a ist, seien an beliebigen Stellen zwei schiefe Linien gezogen, von denen die eine $1\frac{1}{2}$mal so lang als die andere ist, und mit einer der gegebenen Ebenen einen Neigungswinkel bildet, welcher halb so gross ist, als der entsprechende Neigungswinkel der anderen. Wie lang ist die erstere Linie? $a = \frac{1}{8}\sqrt{7}$.

36. In jeder von zwei parallelen Ebenen, deren Abstand gleich a ist, sei eine Strecke gezogen. Aus den Längen $AB = c$, $CD = d$ dieser Strecken, der Länge der Verbindungslinie $AC = b$

und der Angabe, dass BD zu den Ebenen senkrecht steht, soll der Winkel berechnet werden, den AB mit einer in ihrer Ebene liegenden, zu CD parallelen Geraden bildet. $a = 734\frac{1}{2}$, $b = 766\frac{1}{2}$, $c = 243$, $d = 43$.

III. Capitel. Verbindungen dreier Ebenen mit einander.

§. 6. Drei Ebenen überhaupt.

a. Lehrsätze.

1. Zieht man zwischen drei parallelen Ebenen, deren mittlere gleiche Abstände von den anderen hat, eine beliebige gerade Linie, so wird dieselbe durch die mittlere Ebene halbirt.

2. Theilt man beliebig viele zwischen zwei parallelen Ebenen gezogene gerade Linien in gleichem Verhältniss, so liegen die Theilpunkte sämmtlich in einer einzigen, den ersteren parallelen Ebene.

3. Zieht man zwischen drei parallelen Ebenen, deren mittlere gleichweit von den anderen absteht, zwei beliebige Gerade und verbindet je zwei Durchschnittspunkte derselben und einer Ebene mit einander, so können sich jene beiden Geraden nicht kreuzen, wenn die in der mittleren Ebene gezogene Verbindungslinie das arithmetische Mittel zwischen den in den beiden anderen gezogenen ist.

4. Steht von zwei parallelen Ebenen die eine zu einer dritten senkrecht, so steht auch die andere zu derselben senkrecht.

5. Stehen zwei Ebenen zu einer dritten senkrecht und schneiden dieselbe in parallelen Durchschnittslinien, so sind sie selbst einander parallel.

6. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, und halbirt man zwei correspondirende Flächenwinkel an denselben, so sind die Halbirungsebenen einander parallel.

7. Schneidet man zwei parallele Ebenen durch eine dritte und errichtet auf jeder der ersteren in der zugehörigen Durchschnittslinie eine senkrechte Ebene, so sind diese letzteren einander parallel.

8. Steht eine von zwei parallelen Ebenen auf einer von zwei anderen parallelen Ebenen senkrecht, so steht die zweite

von jenen auch senkrecht zu der zweiten von diesen. — Lässt sich dieser Satz ohne Weiteres umkehren?

9. Halbirt man bei zwei parallelen, von einer dritten geschnittenen Ebenen ein Paar der entstandenen inneren Gegenwinkel, so stehen die Halbirungsebenen zu einander senkrecht.

10. Schneiden sich drei Ebenen in drei parallelen Durchschnittslinien, so beträgt die Summe der drei inneren Flächenwinkel des entstandenen offenen dreiseitigen prismatischen Raumes zwei Rechte. — Erweiterung dieses Satzes auf mehrseitige prismatische Räume.

11. Sind zwei innere Flächenwinkel eines offenen dreiseitigen prismatischen Raumes einander gleich, so haben ihre Scheitellinien gleiche Abstände von der dritten Kante. — Umkehrung dieses Satzes. — Anwendung auf dreiseitige prismatische Räume mit drei gleichen Flächenwinkeln.

12. Durch eine zu einer Ebene parallele Linie seien zwei die erstere schneidende schiefe Ebenen gelegt, deren Durchschnittslinien mit der ersten von der gegebenen parallelen Linie ungleiche Abstände haben; man beweise, dass die Ebene, zu welcher der grössere dieser Abstände gehört, einen kleineren Flächenwinkel mit der ersten Ebene bildet. — Umkehrung.

13. Stehen zwei zu einander senkrechte Ebenen zu einer dritten Ebene senkrecht, so bilden die drei Durchschnittslinien mit einander rechte Winkel.

b. Constructions-Aufgaben.

14. Es sind zwei parallele Ebenen und zwei dieselben schneidende Gerade, sowie ausserhalb der Ebenen auf der einen Geraden ein Punkt gegeben; man soll auf der anderen Geraden den Punkt bestimmen, in welchem eine dritte, den vorigen parallele und durch den gegebenen Punkt gehende Ebene sie schneiden würde, ohne diese Ebene selbst zu construiren.

15. Unter welcher Bedingung kann man drei parallele Ebenen so construiren, dass jede derselben durch eine von drei zwischen zwei sich kreuzenden Geraden gegebenen Linien geht?

16. Zwischen drei gegebenen parallelen Ebenen eine Gerade so zu ziehen, dass die Differenz der entstehenden Abschnitte derselben eine gegebene Grösse habe.

17. Zu drei gegebenen parallelen Ebenen eine vierte so zu

construiren, dass ihre Durchschnittspunkte mit einer Geraden vier harmonische Punkte sind.

18. Einen offenen dreiseitigen prismatischen Raum zu construiren, wenn gegeben sind **a**) die Abstände der drei Kanten von einander, oder **b**) zwei dieser Abstände und der an der mittleren Kante liegende Flächenwinkel, oder **c**) einer dieser Abstände, der an der dritten Kante liegende und einer der anderen Flächenwinkel. — Noch zwei ähnliche Aufgaben zu bilden.

19. Zwischen die Ebenen eines gegebenen Flächenwinkels eine dritte Ebene so zu legen, dass sie auf einer von jenen senkrecht steht und die andere in einer gegebenen Entfernung von dieser schneidet.

20. Durch einen zwischen den Schenkelebenen eines Flächenwinkels gegebenen Punkt eine von den Ebenen begrenzte Strecke von gegebener Länge so zu legen, dass sie in diesem Punkte halbirt werde.

§. 7. Die dreiseitige Ecke.

a. Lehrsätze.

Congruenz und Symmetrie.

1. Zieht man durch einen beliebigen Punkt im Raume drei gerade Linien, wovon jede einer Kante einer dreiseitigen Ecke parallel und gleichgerichtet ist, so bilden dieselben die Kanten einer zweiten, der ersten congruenten Ecke.

2. Schneidet man die Flächen einer Ecke durch eine beliebige Ebene, fällt von dem Scheitel der Ecke die senkrechte Gerade auf diese Ebene, verlängert die Senkrechte über ihren Fusspunkt um ihre eigene Länge und verbindet den Endpunkt der Verlängerung mit den Durchschnittspunkten der Kanten der Ecke und jener Ebene, so bilden die Verbindungslinien die Kanten einer der ersten symmetrischen Ecke.

3. Ist eine Ecke einer zweiten und diese einer dritten symmetrisch, so ist die erste der dritten congruent. — Ist die eine von zwei congruenten Ecken einer dritten symmetrisch, so ist auch die andere der dritten symmetrisch.

4. Gleichseitige und gleichschenkelige Ecken sind ihren Scheitelecken congruent.

5. Halbirt man in einer gleichschenkeligen dreiseitigen Ecke den Flächenwinkel der Ebenen der beiden gleichen ebenen

Winkel, so steht die halbirende Ebene zu der gegenüberliegenden Fläche der Ecke senkrecht, und ihre Durchschnittslinie mit derselben halbirt den dritten ebenen Winkel. — Umkehrungen dieses Satzes.

6. Der Begriff der Polar-Ecke und die für diese geltenden Sätze lassen sich auf mehrseitige Ecken ausdehnen. In welcher Weise? Polar-Ecke.

7. In jeder n-seitigen Ecke, deren Flächenwinkel sämmtlich hohl sind, ist die Summe der Flächenwinkel kleiner als $2n$ Rechte und grösser als $2n-4$ Rechte. Winkelsumme.

8. a) In jeder dreiseitigen Ecke ist der Ueberschuss der Summe je zweier Flächenwinkel über den dritten kleiner als zwei Rechte.

b) In jeder dreiseitigen Ecke ist die Summe je zweier Flächenwinkel kleiner als die Summe von zwei Rechten und dem dritten Flächenwinkel.

c) Jeder Aussenwinkel einer dreiseitigen Ecke (d. i. ein Nebenwinkel eines inneren Flächenwinkels) ist kleiner als die Summe und grösser als die Differenz der beiden inneren, ihm nicht anliegenden Flächenwinkel der Ecke.

9. Haben zwei dreiseitige Ecken einen ebenen Winkel gemeinschaftlich, und liegt die nicht gemeinschaftliche Kante der einen Ecke innerhalb der anderen Ecke, so ist die Summe der nicht gemeinschaftlichen ebenen Winkel für die umschliessende Ecke grösser als für die umschlossene.

10. Zieht man innerhalb einer dreiseitigen Ecke oder in einer ihrer Flächen eine Gerade durch den Scheitel, so ist die Summe der Winkel, welche diese Gerade mit den Kanten bildet, kleiner als die Summe der drei ebenen Winkel der Ecke.

11. Der von einer Kante und der Halbirungslinie ihres gegenüberliegenden ebenen Winkels gebildete Winkel in einer dreiseitigen Ecke ist kleiner als die halbe Summe der beiden anderen ebenen Winkel.

12. In jeder dreiseitigen Ecke ist die Summe der von je einer Kante und der Halbirungslinie des ihr gegenüberliegenden ebenen Winkels gebildeten Winkel kleiner als die Summe der ebenen Winkel der Ecke.

13. Halbirt man die drei Flächenwinkel einer dreiseitigen Ecke, so schneiden sich die halbirenden Ebenen in einer einzigen Merkwürdige Linien.

Geraden, und jeder Punkt dieser Geraden ist gleichweit von den Flächen der Ecke entfernt.

14. Der in der vorigen Aufgabe angegebenen Geraden entspricht in der Planimetrie der Mittelpunkt des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises. Giebt es bei der dreiseitigen Ecke auch solche Gerade, welche den Mittelpunkten der äusseren Berührungskreise des Dreiecks entsprechen?

15. Halbirt man die drei ebenen Winkel einer dreiseitigen Ecke und legt durch jede Halbirungslinie und die ihr gegenüberliegende Kante eine Ebene, so schneiden sich die drei so entstandenen Ebenen in einer einzigen Geraden.

Analoge Linien erhält man durch Halbirung der Nebenwinkel der ebenen Winkel der Ecke.

16. Die Ebenen, welche durch die Kanten einer dreiseitigen Ecke senkrecht zu den gegenüberliegenden Flächen der Ecke gelegt werden können, schneiden einander in einer einzigen Geraden.

17. Halbirt man die drei ebenen Winkel einer dreiseitigen Ecke und errichtet in jeder Halbirungslinie die senkrechte Ebene auf der zugehörigen Fläche, so schneiden sich die drei Senkrechten in einer einzigen Linie, und jeder Punkt der letzteren ist von den drei Kanten der Ecke gleichweit entfernt.

18. Schneidet man die Flächen einer dreiseitigen Ecke, welche drei rechte Flächenwinkel hat, durch eine beliebige Ebene und projicirt den Scheitel der Ecke auf die letztere, so fällt die Projection mit dem Durchschnittspunkt der drei Höhen der Schnittfigur zusammen.

b. Constructions-Aufgaben.

Ebene Construction v. Stücken d. Ecke.

19. Die Neigungswinkel der drei Flächenwinkel einer dreiseitigen Ecke aus den drei ebenen Winkeln derselben durch Construction in einer Ebene zu finden.

20. Ebenso aus zwei ebenen Winkeln und dem Neigungswinkel des von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkels die übrigen Stücke in der Ebene zu construiren.

21. Ebenso aus einem ebenen Winkel und den Neigungswinkeln der beiden ihm anliegenden Flächenwinkel.

22. Ebenso aus den Neigungswinkeln der drei Flächenwinkel.

23. Ebenso aus den Neigungswinkeln zweier Flächenwinkel und einem von den diesen gegenüberliegenden ebenen Winkeln.

24. Ebenso aus zwei ebenen Winkeln und dem Neigungswinkel des dem einen derselben gegenüberliegenden Flächenwinkels.

25. Die Flächen einer dreiseitigen Ecke, welche drei rechte Flächenwinkel hat, durch eine Ebene so zu schneiden, dass die Durchschnittsfigur einem gegebenen Dreieck congruent werde.

Constr. von Punkten od. Flächen im Raume.

26. Einen Punkt zu construiren, der von jeder Fläche einer gegebenen dreiseitigen Ecke einen gegebenen Abstand hat.

27. Auf einer gegebenen Ebene einen Punkt zu bestimmen, der von den drei Flächen einer gegebenen dreiseitigen Ecke gleichweit entfernt ist.

Constr. von Ecken im Raume.

28. Zu einer gegebenen dreiseitigen Ecke **a**) eine congruente, **b**) eine symmetrische Ecke zu construiren.

c. Rechnungs-Aufgaben.

Auflösg. v. Ecken.

29. Von einer dreiseitigen Ecke sind zwei ebene Winkel β gegeben; wie verhalten sich die Sinus der gegenüberliegenden Flächenwinkel?

30. Die drei Flächenwinkel einer Ecke aus den drei ebenen Winkeln a, b, c derselben zu berechnen. $a = 25^0\ 13'\ 12''$; $b = 37^0\ 14'\ 9''$; $c = 58^0\ 31'\ 51''$.

31. Umgekehrt: aus den drei Flächenwinkeln α, β, γ einer Ecke die drei ebenen Winkel derselben zu berechnen. $\alpha = 127^0\ 22'\ 3'',4$; $\beta = 51^0\ 18'\ 13'',1$; $\gamma = 72^0\ 26'\ 40'',3$.

32. Aus einem ebenen Winkel und den beiden anliegenden Flächenwinkeln einer dreiseitigen Ecke die übrigen Stücke zu berechnen. $a = 93^0\ 44'\ 45'',0$; $\beta = 26^0\ 42'\ 52'',2$; $\gamma = 78^0\ 43'\ 29'',9$.

33. Aus einem Flächenwinkel und den beiden anliegenden ebenen Winkeln einer dreiseitigen Ecke die drei übrigen Stücke zu berechnen. $\alpha = 102^0\ 55'\ 3'',4$; $b = 42^0\ 18'\ 17''$; $c = 26^0\ 11'\ 15''$.

Von der Ecke abhängige Stücke.

34. In einer Ebene seien zwei gerade Linien unter dem Winkel α gegen einander gezogen; in dem Durchschnittspunkte derselben sei eine Linie unter dem Winkel φ gegen die Ebene geneigt, und ihr Neigungsschenkel theile den ersteren Winkel in dem Verhältniss $m : n$; man soll die an der gegebenen Ebene liegenden Flächenwinkel der durch die drei geraden Linien bestimmten Ecke berechnen. $\alpha = 77^0$; $\varphi = 32^0\ 20'$; $m : n = 3 : 4$.

35. Von einer Ecke seien die drei ebenen Winkel gegeben; eine durch ihren Scheitel gehende Gerade bilde mit den drei Kanten gleiche Winkel. Man berechne die Grösse dieser Winkel.

36. Von einem Punkte, dessen Abstand von einer Ebene gleich h gegeben ist, sei eine senkrechte Gerade auf die Ebene gefällt, und in letzterer seien vom Fusspunkt der Senkrechten aus drei Gerade gezogen, welche unter Winkeln von 120^0 gegen einander geneigt und bezüglich gleich p, q, t gemacht sind. Man berechne die Flächenwinkel, welche die durch je zwei Endpunkte dieser Geraden und den Punkt ausserhalb der Ebene gelegten Ebenen mit einander bilden.

37. Eine Ebene schneide die drei Kanten einer dreiseitigen Ecke in gleichen Entfernungen vom Scheitel. Man berechne ihre Neigungswinkel gegen die Flächen der Ecke aus den Flächenwinkeln der letzteren.

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern.

IV. Capitel. Von den Körpern überhaupt und den Linien und Figuren an denselben.

§. 8. Das Prisma.

a. Lehrsätze.

Diagonalaxen u. Diagonalebenen d. Parallelep.

1. In jedem rechtwinkeligen Parallelepipedon ist das Quadrat der Diagonalaxe, d. i. der Verbindungslinie zweier entgegengesetzten Eckpunkte, gleich der Summe der Quadrate der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten.

2. Die durch die Diagonalen einer Fläche eines Parallelepipedons gelegten Diagonalebenen halbiren einander.

3. Umgekehrt: wenn in einem vierseitigen Prisma zwei Diagonalebenen einander halbiren, so ist es ein Parallelepipedon.

4. Die vier Diagonalaxen eines Parallelepipedon schneiden einander in einem Punkte. — Die Diagonalebenen eines Parallelepipedon schneiden einander in einem Punkte.

5. Stehen zwei Diagonalebenen eines Parallelepipedon auf den Grundflächen senkrecht, so ist es ein gerades.

6. Sind zwei auf denselben Flächen stehende Diagonalebenen eines Parallelepipedon congruente Rechtecke, so ist das Parallelepipedon rechtwinkelig.

7. Gehen die Diagonalebenen eines vierseitigen Prismas durch denselben Punkt, so ist dasselbe ein Parallelepipedon.

8. † Die Summe der Quadrate der Cosinus der drei Winkel, welche eine Gerade mit drei anderen Geraden bildet, von denen jede auf den beiden anderen senkrecht steht, ist gleich 1.

Würfel von Summen u. Differenzen.

9. Ein Würfel, dessen Kante gleich der Summe zweier Strecken a, b ist, ist gleich der Summe der folgenden Körper: 1) eines Würfels mit der Kante a, 2) eines Würfels mit der Kante b, 3) dreier rechtwinkeliger Parallelepipeda, deren Grundkanten gleich a und deren Seitenkanten gleich b sind, 4) dreier rechtwinkeligen Parallelepipeda, deren Grundkanten gleich b und deren Seitenkanten gleich a sind.

10. Ein Würfel, dessen Kante gleich der Differenz zweier Strecken a, b ist, ist gleich der Summe eines Würfels mit der Kante a und dreier rechtwinkeligen Parallelepipeda, deren Grundkanten gleich b und deren Seitenkanten gleich a sind, vermindert um die Summe eines Würfels, dessen Kante gleich b ist, und dreier rechtwinkeligen Parallelepipeda, deren Grundkanten gleich a und deren Seitenkanten gleich b sind.

Flächenw. d. Prismas.

11. Halbirt man sämmtliche Flächenwinkel eines Parallelepipedon, und schliessen die Halbirungsebenen für sich einen Körper ein, so ist dieser ein rechtwinkeliges Parallelepipedon.

12. Die Summe der Flächenwinkel an den Seitenkanten eines jeden $n$seitigen Prismas beträgt $2n - 4$ Rechte.

13. Die Summe der an den Grundkanten eines n-seitigen Prismas liegenden Flächenwinkel desselben beträgt $2n$ Rechte.

14. Die Summe aller Flächenwinkel eines Parallelepipedon beträgt zwölf Rechte.

Schnittfiguren.

15. Verbindet man die Mittelpunkte der Grundflächen eines geraden, regelmässigen Prismas mit einander und legt durch die Verbindungslinie und die Seitenkanten Ebenen, so erhält man congruente Rechtecke. Dasselbe gilt, wenn man alle Grundkanten in demselben Verhältniss theilt und durch je einen Theilpunkt und jene Verbindungslinie (die Axe des Prismas) eine Ebene legt.

16. † Jede zur Grundfläche nicht parallele Schnittfigur eines

geraden Prismas ist grösser als die Grundfläche. Wie verhalten sich beide Flächen zu einander? Wie verhalten sich allgemein die Flächeninhalte zweier ebenen Schnittflächen eines beliebigen Prismas zu einander? Vorausgesetzt wird hierbei, dass der Schnitt immer sämmtliche Seitenkanten trifft.

Congruens. 17. Prismen mit congruenten Grundflächen und gleichen Seitenkanten sind congruent oder symmetrisch, wenn zwei homologe Seitenkanten derselben mit den homologen anliegenden Grundkanten gleiche Winkel bilden.

18. Gerade dreiseitige Prismen, welche in allen homologen Kanten übereinstimmen, sind congruent. Ebenso gerade regelmässige Prismen von gleicher Seitenzahl und gleichen homologen Kanten.

b. Constructions-Aufgaben.

Constr. in der Ebene. 19. Drei aneinanderstossende Kanten eines rechtwinkeligen Parallelepipedon sind gegeben; man construire (in der Ebene) diejenige ebene Schnittfigur desselben, welche durch eine Grundkante und die Halbirungspunkte der beiden gegenüberliegenden Seitenkanten geht.

20. Von einem geraden regelmässig-sechsseitigen Prisma ist die Grundkante gleich a gegeben; man construire (in der Ebene) diejenige ebene Schnittfigur desselben, welche durch eine Grundkante unter einem Flächenwinkel von 45 Grad gegen die Grundfläche gelegt werden kann.

21. Die Kante eines Würfels zu construiren, wenn gegeben ist **a**) die Länge seiner Diagonalaxe, oder **b**) der Umfang einer seiner Diagonalebenen, oder **c**) der Inhalt einer Diagonalebene.

22. Durch einen gegebenen Würfel ist ein ebener Schnitt senkrecht zu einer Diagonalaxe und durch die Mitte derselben gelegt; man soll zu der Schnittfigur eine congruente in einer Ebene aus einer Kante des Würfels construiren.

Im Raume. 23. Ein gerades, regelmässig-dreiseitiges Prisma zu construiren, so dass ein durch eine Grundkante und den gegenüberliegenden Eckpunkt der nicht zu dieser gehörigen Endfläche gelegter ebener Schnitt einen gegebenen Umfang und an jenem Eckpunkt einen gegebenen Winkel habe.

EbeneNetze. 24. Das Netz eines Würfels aus einer Diagonale einer Seitenfläche desselben zu construiren.

25. Das Netz eines schiefen quadratischen Prismas aus der Grundkante, der Seitenkante und den Winkeln der letzteren gegen die zwei anliegenden Grundkanten zu construiren.

26. Das Netz eines geraden, regelmässig-sechsseitigen Prismas zu construiren, in welchem ein durch zwei diametral gegenüberliegende Seitenkanten gelegter ebener Schnitt einen gegebenen Umfang und einen gegebenen Inhalt habe.

27. Ein rechtwinkeliges Parallelepipedon, dessen Kanten bezüglich gleich den gegebenen Strecken a, b, c sind, sei durch eine Ebene, welche durch eine Grundkante geht und eine gegenüberliegende Seitenkante halbirt, geschnitten; man construire die Netze der beiden Theilkörper.

Projectionen.

28. Man construire aus der Kante a eines Würfels seine senkrechte Projection auf eine Ebene, welche zu einer Diagonalaxe des Würfels senkrecht steht.

29. Ebenso, wenn die Diagonalaxe mit der Ebene einen Winkel von 60 Grad bildet und eine Diagonalebene des Würfels senkrecht zur Projectionsebene steht. (Zwei Fälle.)

c. Rechnungs-Aufgaben.

Parallelepiped.

30. Ein rechtwinkeliges Parallelepipedon habe die Kanten a, b, c; wie gross sind seine Diagonalaxen? $a = 96$, $b = 28$, $c = 75$.

31. Von einem rechtwinkeligen Parallelepipedon sind die drei Kanten a, b, c gegeben; man soll die Flächeninhalte seiner Diagonalschnitte berechnen. $a = 5$, $b = 9$, $c = 12$.

32. Von einem rechtwinkeligen Parallelepipedon sei der Umfang der Grundfläche gleich u, der Inhalt der Grundfläche gleich f und die Länge der Diagonalaxe gleich d gegeben; man berechne seine Kanten.

Schnitte des Prismas.

33. Durch ein gerades, regelmässig-dreiseitiges Prisma ist ein ebener Schnitt gelegt, welcher durch eine Grundkante geht und mit der Grundfläche einen Winkel von 45^0 bildet; der Flächeninhalt der Grundfläche sei gleich F. Wie gross ist die Schnittfigur? $F = \sqrt{50}$.

34. Durch ein gerades quadratisches Prisma ist ein ebener Schnitt gelegt, welcher durch eine Grundkante geht und die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Endflächen in dem Abstand p von der Grundfläche schneidet; der Umfang der Grundfläche ist

gleich u gegeben. Man berechne den Flächeninhalt der Schnittfigur. $\alpha)$ $u = 12$, $p = 2$; $\beta)$ $u = 2$, $p = 0{,}6$.

35. Durch die Endpunkte dreier von einem Eckpunkt eines Würfels ausgehenden Kanten ist ein ebener Schnitt durch denselben gelegt; ebenso ein zweiter durch die Endpunkte der von dem diametral gegenüberliegenden Eckpunkt ausgehenden Kanten. Welche Gestalt hat derjenige dritte Schnitt, welcher in gleichem Abstand von den beiden ersteren, parallel zu ihnen durch den Würfel gelegt werden kann, und wie verhält sich sein Flächeninhalt zu demjenigen eines der ersteren Schnitte?

36. Durch einen Würfel, dessen Kante gleich a gegeben ist, sei eine Reihe paralleler Schnitte senkrecht zu einer Diagonalaxe gelegt. a) Man berechne den Umfang und den Inhalt derjenigen beiden Schnitte, welche die Axe in drei gleiche Theile theilen. b) Man vergleiche die Umfänge der zwischen diesen beiden Ebenen liegenden Schnitte mit einander.

37. Ein gerades, dreiseitiges Prisma habe lauter gleiche Kanten; durch die Mitte einer Seitenkante und die Mitten zweier mit dieser zusammenstossenden, aber nicht einander parallelen Grundkanten sei ein ebener Schnitt gelegt. Man gebe die Formen der auf diese Weise möglichen Schnittfiguren an und berechne die Flächeninhalte der durch die drei Halbirungspunkte bestimmten Dreiecke aus der Kante a des Prismas. $\alpha)$ $a = 2{,}64575$; $\beta)$ $a = 3{,}9082$.

Flächenräume.

38. In einem geraden, dreiseitigen Prisma sei die Seitenkante gleich dem Radius des der Grundfläche einbeschriebenen Kreises. Wie verhält sich die Summe der Inhalte der Seitenflächen zu der Summe der Grundflächen?

β 39. Die Kante eines Rhomboëders (d. i. eines von congruenten Rhomben begrenzten Parallelepipedons) sei gleich a, das Verhältniss der Winkel einer Seitenfläche gleich 1 : 2. Man berechne die Längen seiner Diagonalaxen, die Neigungswinkel seiner Flächen gegen einander und die Neigungswinkel der Kanten gegen die Flächen.

40. Durch eine gerade quadratische Säule, deren Grundkante gleich a ist, soll ein ebener Schnitt so gelegt werden, dass die Schnittfläche ein Rechteck mit dem gegebenen Inhalt F werde. Unter welchem Winkel gegen die Grundfläche muss der Schnitt geführt werden? $a = 210$, $F = 46641$.

41. Von zwei gleichen Würfeln, deren Kanten gleich a sind, seien die senkrechten Projectionen auf eine gegebene Ebene construirt, und zwar stehe eine Diagonalaxe, deren Endpunkte sich innerhalb der betreffenden Projectionsfigur projiciren, bei dem einen Würfel senkrecht zur Ebene, während sie bei dem anderen unter dem Winkel α gegen die senkrechte Lage geneigt ist. Welche Formen haben die beiden Projectionsfiguren, und wie verhalten sich ihre Flächeninhalte zu einander?

42. Ein Würfel ist durch ein gerades quadratisches Prisma ausgehöhlt, dessen Grundflächen in denen des Würfels so liegen, dass die Seiten der ersteren den Diagonalen der letzteren bezüglich in gleichen Abständen parallel sind und an Länge $\frac{1}{4}$ derselben betragen. Durch eine Grundkante des Würfels sei ein ebener Schnitt unter dem Neigungswinkel α gegen die Grundfläche gelegt; wie gross ist die Schnittfigur des ausgehöhlten Körpers, wenn die Würfelkante gleich a ist?

43. Von einem schiefen dreiseitigen Prisma seien die Grundkanten $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, eine Seitenkante $CD = d$ und die Winkel $DCA = \beta$, $DCB = \alpha$ gegeben. Man berechne den Flächeninhalt des durch die Punkte A, B, D gehenden ebenen Schnittes desselben. $a = 55$, $b = 48$, $c = 25$, $d = 187{,}76$, $\alpha = \beta = 33^0\ 20'\ 37''{,}5$.

44. Von einem schiefen dreiseitigen Prisma seien die Höhe h, die Winkel α, β, welche eine Seitenkante mit den anliegenden Grundkanten bildet, und die senkrechten Abstände a, b, c der Seitenkanten von einander gegeben; man zeige den Weg zur Berechnung der Kanten.

§. 9. Die Pyramide.

a. Lehrsätze.

1. Legt man durch die Seitenkanten einer beliebigen Pyramide Ebenen, welche auf der Grundfläche senkrecht stehen, so schneiden sich diese sämmtlich in derselben Geraden.

2. † In jeder Pyramide verhalten sich je zwei Seitenkanten zu einander umgekehrt wie die Sinus ihrer Neigungswinkel zur Grundfläche.

3. † Die Höhen je zweier Seitenflächen einer Pyramide verhalten sich zu einander umgekehrt, wie die Sinus der Neigungswinkel dieser Flächen gegen die Grundfläche.

Merkwürdige Gerade oder Punkte, insbes. der Tetraëder.

4. In jeder dreiseitigen Pyramide schneiden sich die [illegible] Ebenen, welche man durch je eine Mittellinie einer der Seitenflächen und durch die der letzteren nicht zugehörige Seitenkante legt, in einer einzigen Geraden.

5. Die vier Geraden, welche man nach dem vorigen Satze construiren kann, schneiden sich in einem einzigen Punkte und theilen sich in demselben im Verhältniss 1 : 3, so dass jedesmal der grössere Abschnitt dem Eckpunkt anliegt. (Dieser Punkt heisst der Schwerpunkt der Pyramide.)

6. Halbirt man zwei Paare gegenüberliegender Kanten einer dreiseitigen Pyramide, so schneiden sich die Verbindungslinien der Halbirungspunkte je eines Paares im Schwerpunkt der Pyramide. Vergl. 5.

7. Verbindet man die in 6 genannten Halbirungspunkte so mit einander, dass ein Viereck entsteht, so ist dieses ein Parallelogramm, und seine Seiten sind bezüglich gleich den Hälften der beiden übrigen Kanten.

8. Die Ebenen, welche die Flächenwinkel einer dreiseitigen Pyramide halbiren, schneiden sich in einem einzigen, von den Grenzflächen der Pyramide gleichweit entfernten Punkt.

9. Errichtet man auf jeder Grenzfläche einer dreiseitigen Pyramide in dem Mittelpunkt des ihr umbeschriebenen Kreises eine senkrechte Gerade, so schneiden sich diese Senkrechten in einem einzigen, von den Eckpunkten der Pyramide gleichweit entfernten Punkt.

10. In demselben Punkte (wie in 9) schneiden sich sämmtliche auf je einer Kante der dreiseitigen Pyramide in ihrem Halbirungspunkt senkrecht stehende Ebenen.

11. Steht ein Punkt von allen Kanten einer beliebigen Pyramide gleichweit ab, so ist der Fusspunkt jeder von demselben auf eine der Grenzflächen gefällten senkrechten Geraden der Mittelpunkt des dieser Fläche einbeschriebenen Kreises.

12. Lässt sich in die Grundfläche einer Pyramide ein Kreis beschreiben und schneiden sich die auf den Grenzflächen in den Mittelpunkten ihrer einbeschriebenen Kreise errichteten senkrechten Geraden sämmtlich in demselben Punkt, so ist dieser Punkt von allen Kanten der Pyramide gleichweit entfernt.

13. Ist durch die Spitze einer Pyramide innerhalb des Raumes der letzteren eine Gerade gezogen, welche zu den Seiten-

flächen gleiche Neigungswinkel hat, so halbirt jede durch diese Linie und eine Seitenkante gelegte Ebene den betreffenden Flächenwinkel.

Grenzflächen, Winkel u. Kanten.

14. Die Summe der Seitenflächen einer jeden Pyramide ist grösser als die Grundfläche derselben.

15. In jeder dreiseitigen Pyramide, welche an der Spitze drei rechte Flächenwinkel hat, ist die zweite Potenz des Inhalts der Grundfläche gleich der Summe der zweiten Potenzen der drei Seitenflächen.

16. Sind in einer dreiseitigen Pyramide zwei Paare Gegenkanten einander gleich, so sind je zwei Flächen und ebenso je zwei Ecken, die eine Kante des dritten Paares gemeinschaftlich haben, congruent.

17. Sind in einer dreiseitigen Pyramide je zwei Gegenkanten gleichlang, so sind alle Grenzflächen und ebenso alle Ecken derselben congruent.

18. Die sechs Flächenwinkel jeder dreiseitigen Pyramide betragen zusammen mehr als vier Rechte und weniger als sechs Rechte.

19. Ist der Fusspunkt der Höhe einer dreiseitigen Pyramide der Durchschnittspunkt der Höhen der Grundfläche, so hat die Summe der Quadrate je zweier Gegenkanten für alle drei Paare denselben Werth.

20. Die Summe der Quadrate der drei von der Spitze einer beliebigen dreiseitigen Pyramide ausgehenden Kanten derselben ist gleich dem dreifachen Quadrat der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche plus der Summe der Quadrate der Abstände dieses Schwerpunktes von den Eckpunkten der Grundfläche.

Schnitte.

21. Legt man durch eine abgestumpfte Pyramide einen zu den Grundflächen in gleichen Entfernungen von beiden parallelen ebenen Schnitt, so ist der Flächeninhalt der Schnittfigur gleich der halben Summe des arithmetischen und des geometrischen Mittels zwischen den Inhalten der beiden Grundflächen.

22. Theilt man die Höhe einer Pyramide nach dem goldenen Schnitt, sodass der grössere Abschnitt der Spitze anliegt, so verhält sich die durch den Theilpunkt parallel zur Grundfläche gelegte Schnittfigur zur Grundfläche, wie die Höhe des entstandenen Pyramidenstumpfs zur Höhe der ganzen Pyramide.

Congruenz und Aehnlichkeit.

23. Pyramiden mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind congruent oder symmetrisch, wenn der Fusspunkt der Höhe in beiden mit homologen Eckpunkten der Grundfläche congruente Dreiecke bildet.

24. Dreiseitige Pyramiden, welche in je zwei homologen Kanten übereinstimmen, sind congruent oder symmetrisch.

25. Pyramiden, welche an den Spitzen congruente Ecken bilden, sind congruent, wenn je zwei homologe Seitenkanten gleich sind; sie sind ähnlich, wenn je zwei homologe Seitenkanten in demselben Verhältniss zu einander stehen.

26. Jede durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt einer Pyramide von dieser abgeschnittene Pyramide ist der ganzen ähnlich, und umgekehrt lassen sich je zwei ähnliche Pyramiden so zusammengestellt denken, dass ihre Spitzen zusammenfallen und die Grundfläche der einen ein der Grundfläche der anderen paralleler Schnitt der letzteren ist.

27. Jede dreiseitige Pyramide lässt sich in zwei gleiche dreiseitige Prismen und zwei congruente dreiseitige Pyramiden zerlegen.

b. Constructions-Aufgaben.

Im Raume.

28. Eine dreiseitige Pyramide aus den drei Grundkanten und den drei Seitenkanten zu construiren.

29. Eine gerade, regelmässig-sechsseitige Pyramide aus einer Grundkante und der Höhe zu construiren.

30. Ebenso aus einer Seitenkante und der Höhe.

Netze.

31. Das Netz einer fünfseitigen Pyramide aus den Seitenkanten, den Grundkanten und zwei von einem Eckpunkt ausgehenden Diagonalen der Grundfläche zu construiren.

32. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide habe die Kanten b, c und der von diesen eingeschlossene Winkel sei gleich φ. Die durch den Scheitel dieses Winkels gehende Seitenkante sei gleich a und stehe senkrecht zur Grundfläche. Man construire das Netz des Körpers.

33. Das Netz einer dreiseitigen Pyramide zu construiren, wenn ihre Grundfläche und die Neigungswinkel der drei Seitenflächen gegen die Grundfläche gegeben sind. Vergl. §. 7, 21.

34. Das Netz einer $n$seitigen Pyramide aus ihrer Grundfläche, ihrer Höhe und dem Fusspunkt der letzteren zu construiren.

35. In ein gerades quadratisches Prisma sei eine Pyramide so gestellt, dass ihre Grundfläche die des Prismas und ihre Spitze der Mittelpunkt der oberen Grundfläche des letzteren sei, und es werde der Raum der Pyramide als Aushöhlung innerhalb des Prismas gedacht; man soll das Netz des so entstehenden Körpers construiren.

36. Eine gerade abgestumpfte, regelmässig-sechsseitige Pyramide sei so durchbohrt, dass der herausgenommene Raum die Form eines geraden, regelmässig-dreiseitigen Prismas habe, dessen in je einer Grundfläche des Pyramidenstumpfes liegende Grundflächen mit jenen die Mittelpunkte gemeinsam haben, und von dem drei Grundkanten Diagonalen der oberen Grundfläche der abgestumpften Pyramide sind. Man soll das Netz eines solchen Körpers construiren.

Schnitte im Raume

37. Durch eine gegebene dreiseitige Pyramide einen ebenen Schnitt zu legen, welcher die Seitenkanten derselben unter gleichen Neigungswinkeln schneide und durch einen gegebenen Punkt gehe.

38. Eine gegebene Pyramide parallel der Grundfläche so zu durchschneiden, dass der Inhalt der Schnittfläche $\frac{1}{3}$ des Inhalts der Grundfläche sei.

39. Durch eine gegebene Pyramide einen ebenen Schnitt parallel der Grundfläche zu legen, der sich zu dieser verhalte, wie die halbe Differenz aus dem unteren Abschnitt der Höhe minus dem oberen zur ganzen Höhe.

40. In einer abgestumpften Pyramide, deren Höhe gleich h gegeben ist, verhalten sich die Grundflächen wie 16 : 1; man soll in derselben einen zu den Grundflächen parallelen Schnitt construiren, der viermal so gross als die kleinere derselben ist.

41. Durch eine beliebige vierseitige Pyramide einen ebenen Schnitt zu legen, so dass derselbe ein Parallelogramm wird.

42. Zwei Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide und der Neigungswinkel des von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkels sind durch Construction in einer Ebene gegeben. Man construire in der Ebene den Radius der Kugel, welche der Pyramide umbeschrieben werden kann.

43. Ebenso, wenn die Grundfläche, der Fusspunkt der Höhe und die Länge der letzteren gegeben sind.

Aehnliche Aufgaben für den Radius der einbeschriebenen Kugel.

c. Rechnungs-Aufgaben.

Pyramide für sich. α

44. Aus der Höhe h und der Grundkante a einer geraden, regelmässig-dreiseitigen Pyramide die Länge ihrer Seitenkanten zu berechnen. $a = 17{,}1$; $h = 5{,}7$.

45. Aus der Höhe h und der Seitenkante b einer geraden regelmässig-vierseitigen Pyramide die Länge der Grundkante zu berechnen. $b = 0{,}33$; $h = 0{,}17$.

46. Aus der Grundkante a und der Seitenkante b einer geraden, regelmässig-sechsseitigen Pyramide die Höhe derselben zu berechnen. $b = 3{,}17$; $a = 0{,}75$.

47. Eine regelmässig-achtseitige Pyramide, deren Grundkante gleich a ist, sei parallel der Grundfläche so durchschnitten, dass die Schnittfläche die Höhe halbirt; man berechne den Flächeninhalt der Schnittfigur. $a = 6{,}4359$.

48. In welchem Abstand von der kleineren Grundfläche muss eine abgestumpfte Pyramide parallel zu derselben durchschnitten werden, damit die Schnittfläche gleich dem arithmetischen Mittel der Grundflächen sei? Gegeben seien die Flächeninhalte G, g der Grundflächen und der Abstand h derselben von einander. $G = 10{,}24$; $g = 5{,}76$; $h = 13{,}566$.

49. Ebenso, wenn die Schnittfigur gleich dem geometrischen Mittel aus den Grundflächen sein soll. $G = 28{,}09$; $g = 7{,}29$; $h = 2\frac{8}{9}$.

50. Eine Pyramide, deren Höhe gleich h gegeben ist, sei parallel der Grundfläche durchschnitten, und es sei die Schnittfläche gleich dem Product der beiden Abschnitte der Höhe, die Grundfläche gleich dem Product des oberen Abschnittes und der ganzen Höhe. Man soll die Inhalte der beiden Flächen berechnen. Gegeben sei die Höhe h der Pyramide.

Pyramide und Prisma.

51. In eine gerade quadratische Pyramide, deren Grundkante gleich a und deren Höhe gleich h ist, sei ein Würfel gestellt, so dass vier Eckpunkte des letzteren in der Grundfläche und die vier anderen auf den Seitenkanten der Pyramide liegen. Wie gross ist die Kante des Würfels? $a = 4{,}2$; $h = 5{,}6$.

52. Wie gross ist die Kante dieses Würfels (Aufg. 51), wenn seine vier oberen Eckpunkte auf den Mittellinien der Seitenflächen liegen? $h = 6$, $a = 4{,}2427$.

53. Ueber einem gleichseitigen Dreieck sollen ein gerades

isma und eine gerade Pyramide von gleicher Höhe so construirt werden, dass die Seitenfläche des Prismas n mal so gross werde, als die der Pyramide. Wie verhält sich die Höhe zur Grundkante? $n = 1$.

54. Welchen Werth erhält n in der vorigen Aufgabe, wenn die Seitenkanten der Pyramide den Grundkanten gleich sein sollen (also für ein reg. Tetraëder)?

55. Wie gross ist die Höhe in Aufg. 53, wenn statt des Dreiecks ein regelmässiges Polygon die gemeinschaftliche Grundfläche bildet, und der Radius r des demselben einbeschriebenen Kreises gegeben ist? $r = 6$, $n = 1\frac{1}{2}$.

Pyramidenstumpf.

56. Ein gerader Pyramidenstumpf hat zur Grundfläche ein Quadrat mit der Seite a; die Seite des Quadrats der Deckfläche ist gleich b; die Summe der vier congruenten Seitenflächen ist gleich der Summe der Grund- und der Deckfläche. Wie gross ist die Höhe des Stumpfes? $\alpha)$ $a = 2{,}5$, $b = 7{,}5$; $\beta)$ $a = 3$, $b = 2$.

57. Die Höhe einer abgestumpften Pyramide, deren Grundflächen G und g gegeben sind, ist durch zwei den Grundflächen parallele Ebenen in drei gleiche Theile getheilt worden; wie gross sind die Schnittflächen? $g = 14{,}4$; $G = 32{,}4$.

58. Die obere Endfläche einer abgestumpften Pyramide sei zugleich die Grundfläche einer anderen, vollständigen Pyramide, deren Spitze in der unteren Endfläche der ersteren liegt. In welchem Verhältniss muss die gemeinschaftliche Höhe beider Körper durch einen zu den Grundflächen parallelen Schnitt getheilt werden, damit die Schnittfläche der abgestumpften Pyramide sich zu derjenigen der vollständigen wie $m^2 : 1$ verhalte, wenn das Verhältniss der Grundflächen wie $p^2 : q^2$ gegeben ist? $m = 2$, $p : q = 17 : 4$.

59. Eine gerade, regelmässig-dreiseitige Pyramide habe β Grundkanten gleich a und Seitenkanten gleich b. Man berechne die Neigungswinkel der Seitenkanten, sowie diejenigen der Seitenflächen gegen die Grundfläche. $a = 1619$, $b = 1038$.

60. Eine Pyramide hat zur Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck, zu Seitenflächen congruente gleichschenkelige Dreiecke, von denen jedes n mal so gross als die Grundfläche ist. Welche Neigungswinkel haben diese Seitenflächen **a**) unter sich, **b**) gegen die Grundfläche? $n = \frac{2}{3}$.

61. Auf der Ebene eines gleichschenkeligen und recht-

winkeligen Dreiecks, dessen Katheten gleich a gegeben sind, ist im Schwerpunkt des Dreiecks eine senkrechte Gerade errichtet, deren Länge gleich b gegeben ist. Durch den Endpunkt der Senkrechten und die Seiten des Dreiecks sind Ebenen gelegt. Man berechne die Neigungswinkel dieser Ebenen gegen die Fläche des rechtwinkeligen Dreiecks und die ebenen Winkel ihrer Kanten gegen die Seiten des letzteren. $a=5$, $b=4$, oder $a=7$, $b=8$.

62. Von einem Punkte O im Raume gehen die drei Linien OA, OB, OC aus, die sich wie $m:n:p$ verhalten, und von denen jede auf den anderen senkrecht steht. Welche Neigungswinkel bildet die Ebene ABC mit den Ebenen OAB, OAC, OBC? $m:n:p=2:3:4$.

63. Wenn in einer n-seitigen, geraden, regelmässigen Pyramide ein ebener Winkel an der Spitze gleich α gegeben ist, wie gross ist dann der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander? $\alpha=26^0\,4'$, $n=12$.

64. Von einer abgestumpften Pyramide sei die Summe der Seitenflächen gleich s gegeben; jede Seitenfläche bilde mit der grösseren Grundfläche einen Winkel gleich α; die kleinere Grundfläche sei halb so gross als die grössere. Man soll die Flächeninhalte beider Grundflächen berechnen. $s=283$, $\alpha=26^0\,10'$.

65. Alle Seitenkanten einer abgestumpften, regelmässig-fünfseitigen Pyramide seien den Seiten der grösseren Grundfläche gleich; unter welchem Winkel müssen sie gegen diese Grundfläche geneigt sein, damit die letztere sich zur kleineren wie $m:n$ verhalte? $m:n=907:125$.

66. Auf jeder Fläche eines Würfels als Grundfläche sei nach aussen eine gerade Pyramide errichtet, deren Höhe gleich dem vierten Theile der Würfelkante sei; man berechne den Neigungswinkel zweier in einer Würfelkante an einander stossenden Pyramidenflächen.

67. Von einer dreiseitigen Pyramide sind die drei Grundkanten sowie die ebenen Winkel zweier Seitenflächen bekannt; man berechne die Winkel der dritten Seitenfläche, sowie sämmtliche Seitenkanten.

68. In einer dreiseitigen Pyramide sei durch Verbindung der Halbirungspunkte zweier Paare einander gegenüberliegender Kanten ein Parallelogramm construirt; man berechne die Winkel des letzteren aus den gegebenen Längen sämmtlicher Kanten.

69. Aus den Längen der sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide die Entfernung desjenigen Punktes von den Eckpunkten zu berechnen, welcher von denselben gleichweit entfernt ist. (Aufg. §. 9, 9.)

§. 10. Der Cylinder.

a. Lehrsätze.

1. Fällt man von Punkten der Peripherie eines Kreises auf eine zu seiner Ebene parallele Ebene senkrechte gerade Linien, so liegen die Fusspunkte der letzteren auf der Peripherie eines dem ersten congruenten Kreises. Das Gleiche gilt für beliebige schiefe, aber unter sich parallele Linien.

Schnitt- u. Berührungs-Ebenen.

2. Ebene Schnitte, welche durch einen geraden Cylinder parallel mit seiner Axe gelegt werden, liefern gleichgrosse Schnittfiguren, wenn sie gleichweit von der Axe entfernt sind, und umgekehrt. Je näher ein solcher Schnitt der Axe liegt, desto grösser ist er, und umgekehrt. Jeder Axenschnitt eines geraden Cylinders ist grösser, als jeder der Axe parallele Schnitt desselben.

3. Errichtet man auf einem Axenschnitt eines geraden Cylinders in einer in demselben liegenden Seitenlinie eine senkrechte Ebene, so berührt diese den Cylinder in jener Seitenlinie.

4. Eine durch die Axe eines geraden Cylinders senkrecht zu einer Berührungsebene desselben gelegte Ebene geht durch die Berührungslinie.

5. Der durch die Berührungslinie einer Tangentialebene eines geraden Cylinders gehende Axenschnitt desselben steht senkrecht zu jener Ebene.

6. Errichtet man auf einer Tangentialebene eines geraden Cylinders in ihrer Berührungslinie die senkrechte Ebene, so geht dieselbe durch die Axe des Cylinders.

7. Schneiden sich zwei Schnittebenen eines geraden Cylinders in einer Seitenlinie desselben, so ist der von ihnen gebildete Flächenwinkel halb so gross, als der Flächenwinkel der zwei durch die Axe und je eine der nicht gemeinschaftlichen Seitenlinien in den ersteren Ebenen gelegten Schnittebenen. — In jedem dreiseitigen Prisma, dessen Seitenkanten Seitenlinien eines geraden Cylinders sind und von welchem eine Seitenfläche durch die Axe geht, stehen die beiden anderen Seitenflächen senkrecht zu einander. — In jedem vierseitigen Prisma, dessen Seitenkanten Seitenlinien

eines geraden Cylinders sind, ist die Summe je zweier einander gegenüberliegenden Flächenwinkel der Seitenflächen gleich zwei Rechten.

Gelten die Sätze 2—7 sämmtlich oder theilweise auch für schiefe Cylinder? Kann man noch andere Sätze bilden, welche in ähnlicher Weise planimetrischen Sätzen aus der Kreislehre entsprechen?

8. In jedes (gerade oder schiefe) Prisma, in dessen Grundfläche sich ein Kreis einbeschreiben lässt, kann man einen Cylinder construiren, dessen krumme Fläche von jeder der Seitenflächen des Prismas berührt wird.

9. Um jedes Prisma, dessen Grundfläche sich ein Kreis umbeschreiben lässt, kann ein Cylinder construirt werden, sodass die Seitenkanten des Prismas Seitenlinien des Cylinders, die Seitenflächen des ersteren also Schnittebenen des letzteren werden.

10. Um und in jeden Cylinder lassen sich Prismen von jeder verlangten Seitenzahl construiren; dieselben sind regelmässig, wenn die Berührungs-, beziehungsweise Durchschnittspunkte ihrer Grundkanten in der Grundfläche des Cylinders die Peripherie der letzteren in gleiche Theile theilen.

11. Zwei Berührungsebenen eines geraden Cylinders sind entweder einander parallel, oder schneiden sich in einer zur Cylinderaxe parallelen Geraden.

12. Umgekehrt lassen sich durch jede ausserhalb eines geraden Cylinders gegebene, der Axe desselben parallele Gerade zwei Berührungsebenen an den Cylinder legen. Die durch jene Gerade und die Axe bestimmte Ebene halbirt den Flächenwinkel der beiden Berührungsebenen.

Vermischte Sätze.

13. Cylinder mit gleichen Grundflächen, gleichen Höhen und gleichen Neigungswinkeln der Axen gegen die Grundflächen sind congruent.

14. Jede zwei congruente, in parallelen Ebenen liegende Kreise können als Grundflächen eines Cylinders gedacht werden.

15. Man bilde und beweise Lehrsätze über Cylinder, welche einander (in einer Seitenlinie) berühren, analog den Sätzen über sich berührende Kreise.

16. Ebenso Sätze über gemeinschaftliche Berührungsebenen zweier Cylinder.

17. Sind die Verbindungslinien des Mittelpunkts der einen Grundfläche eines Cylinders mit drei Punkten der Peripherie seiner

anderen Grundfläche einander gleich, so ist der Cylinder ein gerader.

Schnitte des schiefen Cylinders.

18. Von allen Axenschnitten eines schiefen Cylinders ist derjenige, welcher durch den Neigungsschenkel der Axe gegen die Grundfläche geht, der kleinste, derjenige, welcher durch den auf diesem Neigungsschenkel senkrechten Durchmesser geht, der grösste.

19. Wird ein schiefer Cylinder durch eine der Grundfläche nicht parallele Ebene so geschnitten, dass die Axe des Cylinders gegen beide Ebenen gleiche Neigungswinkel bildet und die Neigungsschenkel derselben (nach verschiedenen Seiten) in einer Ebene liegen, so ist die Schnittfigur ein Kreis und der Grundfläche congruent.

b. Constructions-Aufgaben.

20. An einen gegebenen (geraden oder schiefen) Cylinder durch eine gegebene Seitenlinie desselben eine Berührungsebene zu legen.

21. Um ein gegebenes dreiseitiges Prisma einen Cylinder zu beschreiben.

22. In ein gegebenes regelmässiges Prisma einen Cylinder zu beschreiben.

23. Um einen gegebenen Cylinder ein Prisma zu beschreiben, dessen Grundfläche ein regelmässiges Zehneck ($2 \cdot 2^n$-, $3 \cdot 2^n$-, $5 \cdot 2^n$-, $15 \cdot 2^n$-Eck) ist.

24. In einen gegebenen Cylinder ein dreiseitiges Prisma zu beschreiben, von welchem zwei Winkel der Grundfläche gegeben sind.

Constr. in der Ebene. Schnittfig.

25. Ein Rechteck näherungsweise zu construiren, welches sich zu einem Cylindermantel zusammenrollen lässt, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist.

26. Von einem schiefen Cylinder ist die Länge der Axe, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche und der Inhalt des zur Grundfläche senkrechten Axenschnitts (durch ein ihm gleiches Quadrat) gegeben; man construire einen seiner Grundfläche congruenten Kreis.

27. Ein Cylinder sei einem geraden quadratischen Prisma einbeschrieben, dessen Grundkante und Seitenkante gegeben sind. Man soll denjenigen ebenen Schnitt des Cylinders, welcher zur

Axe parallel und von derselben um den halben Radius der Grundfläche entfernt ist, in der Ebene der Gestalt und Grösse nach construiren.

28. In der Grundfläche eines geraden Cylinders seien zwei zu einander senkrechte Durchmesser, und zu einem derselben sei in der oberen Grundfläche ein paralleler Durchmesser gezogen. Durch einen Endpunkt des letzteren und den nicht parallelen der ersteren Durchmesser sei ein ebener Schnitt gelegt. Man soll das entstandene Dreieck aus dem Radius und der Höhe des Cylinders in der Ebene construiren.

29. Von einem schiefen Cylinder ist die Länge der Axe, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche und der Radius der letzteren gegeben. Man construire in einer Ebene der Gestalt und Grösse nach den kleinsten Axenschnitt dieses Cylinders.

30. In einer Ebene ist die Grundfläche eines auf derselben schief stehend gedachten Cylinders und die senkrechte Projection des Mittelpunktes seiner oberen Grundfläche auf diese Ebene gegeben; ausserdem ist die Höhe des Cylinders bekannt. Man soll die Länge seiner Seitenlinie und den Neigungswinkel derselben gegen die Grundfläche durch Construction in jener Ebene bestimmen.

31. In einer Ebene sei ein Quadrat gegeben; um jeden Eckpunkt desselben sei in dieser Ebene mit der halben Seite als Radius ein Kreis beschrieben, und auf dem Kreise, welcher dem Quadrat einbeschrieben werden kann, sei ein gerader Cylinder errichtet gedacht, dessen Höhe gleich der Seite des Quadrats ist. Die obere Grundfläche dieses Cylinders sei zugleich obere Grundfläche für vier auf je einem der um die Eckpunkte beschriebenen Kreise stehende schiefe Cylinder, endlich sei das so gegebene System von Körpern in einem der halben Höhe gleichen Abstand von der Grundebene, parallel zu dieser durchschnitten. Man soll in jener Ebene die Durchschnittsfigur der Gestalt und Grösse nach construiren.

Constr. v. Cylindern.

32. Ueber einen gegebenen Kreis als Grundfläche einen schiefen Cylinder zu construiren, dessen kleinster Axenschnitt einen gegebenen Inhalt und einen gegebenen Umfang habe.

33. In einen gegebenen Würfel soll ein Cylinder mit quadratischem Axenschnitt gelegt werden, dessen Axe mit einer

Diagonalaxe des Würfels zusammenfällt, und dessen Grundflächen je drei Würfelflächen berühren.

34. In eine gegebene dreiseitige Pyramide einen Cylinder mit quadratischem Axenschnitt zu legen, so dass seine obere Endfläche die Seitenflächen der Pyramide berühre, und die untere in der Grundfläche der Pyramide liege.

Berührungs-Aufgaben.

35. Durch eine ausserhalb eines (geraden) Cylinders gegebene, der Axe desselben parallele Gerade eine Berührungsebene an denselben zu legen.

36. An zwei gegebene gerade Cylinder, welche mit ihren Grundflächen auf dieselbe Ebene aufgestellt sind, eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen.

37. Einen geraden Cylinder zu construiren, der beide Schenkelebenen eines gegebenen Flächenwinkels berühre, und dessen Mantel durch einen zwischen diesen Ebenen gegebenen Punkt gehe.

Aehnliche Berührungs-Aufgaben nach Analogie der planimetrischen!

Sich schneidende Cylinder.

38. Drei gerade Cylinder, welche mit ihren Grundflächen auf derselben Ebene stehen, seien gegeben. Man soll einen vierten Cylinder construiren, welcher jeden der ersteren in Seitenlinien schneidet, so dass die nach einer gemeinschaftlichen Seitenlinie zweier Cylinder gezogenen beiden Axenschnitte derselben jedesmal senkrecht zu einander stehen.

Netze.

39. Zieht man in jeder der beiden Grundflächen eines geraden Cylinders eine Sehne, sodass diese Sehnen einander nicht parallel sind, und legt durch je drei Endpunkte dieser Linien Ebenen, so entsteht eine dreiseitige Pyramide. Es sei der Radius und die Höhe des Cylinders nebst den Längen der beiden Sehnen und dem Winkel, welchen die eine mit einer der anderen parallelen Sehne ihres Kreises bildet, gegeben; man soll das Netz der Pyramide construiren.

40. Man construire das Netz eines Würfels, welcher so in einen geraden Cylinder gestellt werden kann, dass zwei seiner Eckpunkte mit den Mittelpunkten der Grundflächen zusammenfallen und die übrigen auf der krummen Mantelfläche des Cylinders liegen. Die Dimensionen des letzteren sind gegeben.

c. Rechnungs-Aufgaben.

α 41. Wie gross ist jede Seitenfläche eines einem geraden Cylinder mit dem Radius r und der Höhe h einbeschriebenen quadratischen Prismas? $r = 0{,}7$, $h = 1{,}41421$.

42. Wie gross ist jede Seitenfläche einer regelmässig-dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche der unteren Grundfläche eines geraden Cylinders vom Radius r und der Höhe h einbeschrieben, und deren Spitze der Mittelpunkt der oberen Grundfläche dieses Cylinders ist? $h = 1{,}20139$; $r = 1{,}6$.

43. In einen Würfel soll ein gerader Cylinder construirt werden, so dass seine Axe in einer Diagonalaxe des Würfels liege und seine Grundflächen die Würfelflächen berühren. Wie gross ist die Höhe dieses Cylinders, wenn dieselbe dem Achtfachen des Radius seiner Grundfläche gleich sein soll, und wenn die Diagonalaxe des Würfels gleich d ist?

44. Wie muss sich der Radius eines geraden Cylinders zur Höhe desselben verhalten, damit sein Axenschnitt seiner Grundfläche gleich sei?

45. Wie verhält sich der Flächeninhalt des Axenschnitts eines quadratischen Cylinders zum Inhalt der Grundfläche desselben?

46. Die Grundflächen zweier geraden Cylinder, welche sich in einem Parallelogramm schneiden, liegen in derselben Ebene, haben eine Centrallinie gleich c und bezüglich die Radien R und r; die Höhe ist in beiden Cylindern gleich h. Man soll den Flächeninhalt jenes Parallelogramms berechnen. $R = 44$, $r = 37$, $c = 15$, $h = 25$.

47. Ein gerader Cylinder ist durch eine der Axe parallele Ebene geschnitten; die Diagonale der Schnittfigur ist gleich d, ihr Flächeninhalt gleich F, ihr Abstand von der Axe gleich c gegeben. Man soll die Höhe und den Grundflächen-Radius des Cylinders berechnen. $d = 17$, $F = 120$, $c = 3$.

48. Von einem geraden Cylinder sei der Flächeninhalt F eines Axenschnitts gegeben. Man berechne den Flächeninhalt eines zu der Grundfläche senkrechten Schnitts, welcher den zu ihm senkrechten Radius der Grundfläche halbirt.

49. In eine dreiseitige Pyramide, deren Grundkanten bezüglich gleich a, b, c, und deren Seitenkanten sämmtlich gleich d sind, sei ein gerader Cylinder einbeschrieben (so dass also seine

Grundfläche in derjenigen der Pyramide liegt, und seine obere Grundfläche einer zu jener parallelen Schnittfigur einbeschrieben ist); die Diagonale eines Axenschnitts des Cylinders sei gleich f. Man soll seine Höhe und seinen Radius berechnen. $a = 104$, $b = 112$, $c = 120$, $d = 97$, $f = 51$.

50. Den Inhalt des durch die Axe a und die Höhe h gehenden Axenschnitts eines schiefen Cylinders aus a, dem Radius r und dem Neigungswinkel α der Axe gegen die Grundfläche zu berechnen. $a = 3{,}4201$; $r = 1{,}57$; $\alpha = 32^0\ 12'\ 6''$. β

51. Ebenso den Flächeninhalt eines anderen Axenschnitts des Cylinders, wenn ausserdem der Winkel β zwischen dem Neigungsschenkel der Axe und dem zu dem Axenschnitt gehörigen Radius der Grundfläche gegeben ist. $r = 7$, $a = 10$, $\alpha = 56^0\ 12'\ 17''$, $\beta = 20^0\ 10'\ 15''$.

52. Von einem schiefen Cylinder ist gegeben die Axe gleich a, die kleinere Diagonale des zur Grundfläche senkrechten Axenschnitts gleich b und der Flächeninhalt F dieses Axenschnitts. Man berechne den Radius der Grundfläche und die Höhe. $a = 18\frac{9}{11}$, $b = 42{,}937$, $F = 616$.

§. 11. Der Kegel.

a. Lehrsätze.

Kegel für sich.

1. Zieht man in zwei Kreisen von ungleicher Grösse, deren Ebenen parallel sind, beliebig viele Paare unter sich paralleler und gleich gerichteter Radien, so schneiden sich die Verbindungslinien der Endpunkte je eines Paares in demselben Punkte. — Wie gestaltet sich der Satz, wenn je zwei einander parallele Radien entgegengesetzt gerichtet sind?

2. Zieht man in der Grundfläche eines geraden Kegels beliebig viele unter sich gleiche Sehnen und legt durch jede derselben und die Spitze eine Ebene, so erhält man congruente Schnittfiguren.

3. Lässt sich der vorstehende Satz umkehren? (Verschiedene Umkehrungen!)

4. In jede (gerade oder schiefe) Pyramide, in deren Grundfläche sich ein Kreis einbeschreiben lässt, kann man einen Kegel construiren, dessen krumme Seitenfläche von jeder Seitenfläche der Pyramide berührt wird.

5. Um jede Pyramide, deren Grundfläche sich ein Kreis umbeschreiben lässt, kann ein Kegel construirt werden, so dass die Seitenflächen der Pyramide Schnittebenen des Kegels, die Seitenkanten der ersteren Seitenlinien des letzteren sind.

6. Kegel mit gleichen Grundflächen, gleichen Axen und gleichen Neigungswinkeln der Axen gegen die Grundflächen sind congruent.

7. Legt man durch einen abgestumpften Kegel parallel zu den Grundflächen und in gleicher Entfernung von beiden einen ebenen Schnitt, so ist der Radius des letzteren gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den Radien der Grundflächen. — In welcher Beziehung steht die Fläche des Schnitts zu den Grundflächen?

8. Werden zwei Kegel mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen in gleichen Abständen von ihren Grundflächen parallel zu diesen durchschnitten, so sind die Schnittfiguren congruente Kreise.

9. Zwei gerade Kegel, welche eine Seitenlinie, die mit ihren beiden Axen in derselben Ebene liegt, gemeinschaftlich haben (wobei die Spitze des einen auf der krummen Fläche des anderen liegt), berühren einander in dieser Seitenlinie.

10. Berührt eine Ebene einen Kegel, so schneidet jeder der Grundfläche parallele Schnitt die Ebene in einer Tangente des Schnittkreises.

11. Zwei gerade Kegel, deren Axen in einer geraden Linie liegen und deren Scheitel verschieden sind, haben entweder paarweise parallele Seitenlinien oder schneiden sich in einem zu der Axe senkrechten Kreise.

Kegel mit Cylinder.

12. Ein gerader Cylinder und ein gerader Kegel, deren Axen in einer Linie liegen, schneiden sich in einem zu der Axe senkrechten Kreise.

b. Constructions-Aufgaben.

Gerader Kegel, Construction in der Ebene.

13. Zwei gerade Kegel, deren Grundflächen concentrische Kreise sind, stehen auf derselben Seite der gemeinsamen Grundebene, der Radius des ersten ist halb so gross als der Radius des zweiten, die Höhe des ersten doppelt so gross als die Höhe des zweiten. Man construire aus dem Radius und der Höhe des ersten die Durchschnittsfigur der beiden Kegel.

14. Ein gerader Kegel sei durch einen zweiten, dessen Seitenlinien bezüglich den Seitenlinien des ersten parallel sind, ausgehöhlt; die Radien beider Kegel und die Höhe des ersten sind gegeben. Man construire in einer Ebene diejenige Durchschnittsfigur des durch die Aushöhlung entstandenen Körpers, welche durch denselben parallel zu der Grundfläche und in einem der halben Höhe der inneren Kegelfläche gleichen Abstand von ihr gelegt werden kann.

15. Von einem geraden Cylinder sei die Axe und der Radius gegeben, ein gerader Kegel stehe auf derselben Grundebene, und seine Spitze liege im Mittelpunkt der oberen Grundfläche des Cylinders, sein Radius sei aber dreimal so gross als der des letzteren. Man soll eine Figur construiren, durch deren Rotation ein Körper erzeugt werden kann, welcher dem ausserhalb des Cylinders liegenden Theile des Kegels congruent ist.

Constr. von Kegeln.

16. Einen geraden Kegel zu construiren, von welchem die Lage der Axe, ein Punkt der Peripherie des Grundkreises und ein Punkt der Seitenfläche gegeben sind.

17. Einen geraden Kegel zu construiren, wenn die Spitze, ein Punkt der Peripherie der Grundfläche und zwei Punkte der Seitenfläche gegeben sind. (Keine zwei der gegebenen Punkte mit der Spitze in gerader Linie!)

18. Einen geraden Kegel zu construiren, wenn zwei Punkte der Peripherie der Grundfläche und eine Gerade, in welcher eine Seitenlinie liegen soll, gegeben sind.

Kegel und Pyramide.

19. Eine Seitenfläche einer regelmässig-zehnseitigen Pyramide zu construiren, welche einem geraden Kegel einbeschrieben ist, wenn der Radius und die Höhe des Kegels gegeben sind.

Schiefer Kegel.

20. Von einem schiefen Kegel ist die Axe, die längste Seitenlinie und der Neigungswinkel der letzteren gegen die Grundfläche gegeben; man construire der Gestalt und Grösse nach denjenigen Axenschnitt dieses Kegels, welcher durch den zur Axe senkrechten Durchmesser der Grundfläche geht.

21. In der Ebene der Grundfläche eines schiefen Kegels ist ausser dieser Grundfläche die senkrechte Projection der Spitze auf dieselbe gegeben; man construire in dieser Ebene die senkrechte Projection des ihr parallelen Schnittkreises des Kegels auf dieselbe, welcher die Höhe im Verhältniss 1 : 2 theilt.

22. Die senkrechte Projection einer geraden Kegelfläche auf eine zu ihrer Grundfläche senkrechte Ebene zu construiren.

Kegelstumpf.

23. Die kleinere Grundfläche eines abgestumpften geraden Kegels sei zugleich die Grundfläche von vier vollständigen Kegeln, deren Spitzen in der Peripherie des grösseren Grundkreises liegen und dieselbe in vier gleiche Bogen theilen. Man construire aus den Radien der beiden Grundflächen in einer Ebene diejenige parallele Schnittfigur des genannten Körpersystems, welche die Höhe halbirt.

c. Rechnungs-Aufgaben.

Schnittfiguren. α

24. Ein Kegel, dessen Grundfläche den Radius r hat, ist durch eine derselben parallele Fläche geschnitten, welche die Höhe im Verhältniss $m : n$ theilt; man berechne den Flächeninhalt der Schnittfigur.

25. In welchem Abstand von der Grundfläche muss man einen abgestumpften Kegel, dessen Radien gleich R und r sind, und dessen Höhe gleich h ist, parallel zu jener durchschneiden, damit die Schnittfigur dem arithmetischen Mittel der beiden Grundflächen gleich sei? $R = 14$, $r = 2$, $h = 18$.

26. Von einem geraden Cylinder ist der Radius r gegeben. Auf jeder seiner Grundflächen steht ein Kegel, dessen Spitze der Mittelpunkt der anderen Grundfläche ist. Wieviel beträgt der Umfang des Kreises, in welchem sich die beiden Kegelmäntel schneiden?

Dimensionen.

27. Die Seitenlinie eines geraden Kegels aus der Höhe h und dem Radius r zu berechnen für $\alpha)$ $h = 2{,}21$; $r = 0{,}6$; $\beta)$ $h = 24$; $r = 16\frac{1}{10}$; $\gamma)$ $h = 25\frac{1}{2}$, $r = 3\frac{1}{8}$. — Umkehrungen dieser Aufgabe.

28. Aus der grössten Seitenlinie S eines schiefen Kegels, der kleinsten Seitenlinie s und der Axe a den Radius der Grundfläche zu berechnen. $S = 52$, $s = 39$, $a = 42{,}426$.

29. Ebenso aus S, s, r die Axe a, oder s aus S, a, r, oder S aus s, a, r.

Kegel mit Pyramide.

30. In einen geraden Kegel, dessen Radius gleich r, und dessen Höhe gleich h gegeben ist, sei eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche beschrieben. Wie gross ist jede Seitenfläche derselben? $r = 7$, $h = 6$.

31. Ebenso für eine umbeschriebene, regelmässig-dreiseitige Pyramide.

Kegelstumpf.

32. In einem geraden abgestumpften Kegel stehen zwei vollständige Kegel, so dass die Grundfläche eines jeden eine der Grundflächen, und die Spitze desselben der Mittelpunkt der anderen Grundfläche des Kegelstumpfs ist. Gegeben sind die Radien des letzteren; es soll der Radius des Kreises berechnet werden, in welchem sich die beiden vollständigen Kegel schneiden.

33. Von einer abgestumpften, geraden, quadratischen Pyramide seien die Grundkanten bezüglich gleich a und b, die Seitenkanten gleich s gegeben; ein abgestumpfter Kegel ist so construirt worden, dass seine obere Grundfläche der oberen des Pyramidenstumpfs umbeschrieben, seine untere der unteren des letzteren einbeschrieben ist. Man berechne die Seitenlinie des Kegelstumpfs. $a = 4{,}55228$; $b = 2$; $s = 6{,}89$.

β

34. Der Winkel an der Spitze eines Axenschnitts eines geraden Kegels sei gleich α, die Höhe gleich h; man berechne den Radius der Grundfläche und die Seitenlinie. $\alpha = 32^0\,31'\,14'',4$; $h = 24$.

35. Aus der Axe a eines schiefen Kegels, ihrem Neigungswinkel φ gegen die Grundfläche und dem Radius r der letzteren die Höhe h, sowie die grösste und die kleinste Seitenlinie zu berechnen. $a = 356{,}74$; $\varphi = 59^0\,41'\,52''$; $r = 255$.

36. Ebenso aus a, h und r die Werthe von φ, s, S, sowie den Neigungswinkel α der grössten Seitenlinie gegen die Grundfläche zu berechnen. $a = 44{,}8035$; $h = 42$; $r = 18{,}5$.

37. Ebenso aus S, s und α die Werthe von h, φ und r. $S = 14{,}4213$, $s = 11{,}8678$, $\alpha = 43^0\,54'\,4'',3$.

38. Ebenso aus a, r, α die Werthe von S, φ, s, h. $a = 4{,}2075$; $r = 4{,}3050$; $\alpha = 35^0\,29'\,21'',6$.

§. 12. Die Kugel.

a. Lehrsätze.

Sehnen und Schnittkreise.

1. Eine gerade Linie kann mit einer Kugelfläche nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam haben.

2. Die Halbirungspunkte aller Geraden, welche zwischen je zwei Punkten einer Kugelfläche unter sich parallel gezogen werden können, liegen in einem grössten Schnittkreise der Kugel. — Umkehrungen dieses Satzes.

3. Der geometrische Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche, welche durch drei gegebene, nicht in gerader Linie liegende Punkte geht, ist die auf der Ebene dieser drei Punkte in dem von ihnen gleichweit entfernten Punkt senkrecht stehende Gerade. — Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche, welche durch zwei gegebene Punkte geht?

4. Unter allen Schnittkreisen einer Kugel, welche man durch einen innerhalb der letzteren gegebenen Punkt legen kann, ist derjenige der kleinste, dessen Mittelpunkt dieser Punkt ist.

5. Errichtet man über einem Schnittkreise einer Kugel in dem grösseren Abschnitt derselben zwei gerade Kegel, so dass die Spitze des einen im Mittelpunkt der Kugel, die des anderen in der Kugelfläche liegt, so ist der Winkel an der Spitze des Axenschnitts im ersten Kegel doppelt so gross, als im zweiten. — Lässt sich dieser Satz auf schiefe Kegel erweitern?

Zwei Kugeln.

6. Ist die Centrallinie zweier Kugeln grösser als die Summe ihrer Radien, so liegt jede dieser Kugeln ganz ausserhalb der anderen. — Ist die Centrallinie gleich der Summe der Radien, so berühren die Kugeln einander von aussen. — Man bilde die entsprechenden Sätze für die Fälle, dass die Centrallinie kleiner als die Summe, aber grösser als die Differenz der Radien, dass sie gleich dieser Differenz, und dass sie kleiner als dieselbe ist. Für welche Fälle müssen die Kugeln von ungleicher Grösse sein? — Umkehrungen.

7. Die Durchschnittslinie der Oberflächen zweier sich schneidenden Kugeln ist eine Kreislinie.

8. Die Centrallinie zweier sich schneidenden Kugeln ist senkrecht zu der Ebene des Schnittkreises und trifft diese in ihrem Mittelpunkt.

Kugel und Kegel.

9. Liegt in einer ausserhalb einer Kugel gegebenen Ebene ein Kreis so, dass die Verbindungslinie seines Mittelpunktes mit dem Kugelmittelpunkt senkrecht zu seiner Ebene steht, so schneiden die Verbindungslinien seiner Peripherie mit dem Mittelpunkt der Kugel die Oberfläche der letzteren in einer Kreislinie, deren Ebene der Ebene des ersteren Kreises parallel ist.

10. Von einem Punkte ausserhalb einer Kugel lassen sich unzählig viele Berührungslinien an dieselbe legen. Der geometrische Ort ihrer Berührungspunkte ist eine Kreislinie; sie selbst sind Seitenlinien eines geraden Kegels (Berührungskegel), und die

Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Kugelmittelpunkt ist die Axe dieses Kegels.

11. Die Spitze eines jeden Berührungskegels einer Kugel und der Mittelpunkt des zugehörigen Berührungskreises theilen den durch letzteren gehenden Durchmesser der Kugel harmonisch. (Pole und Polarebenen einer Kugel. Erweiterung der betreffenden Sätze der neueren Geometrie über den Kreis für die Kugel.)

Berührungs-Ebenen.

12. Durch jede ausserhalb einer Kugel gegebene Gerade lassen sich zwei Berührungsebenen an dieselbe legen. Die durch jene Gerade und den Kugelmittelpunkt bestimmte Ebene halbirt den Winkel der Berührungsebenen. — Die Linien, welche die Berührungspunkte mit einem beliebigen Punkte jener Geraden verbinden, bilden mit letzterer gleiche Winkel.

Aehnlichkeitspunkt.

13. Zieht man in zwei gegebenen Kugeln zwei beliebige, aber einander parallele und gleichgerichtete Radien und verbindet die Endpunkte der letzteren mit einander, so schneidet jede auf solche Weise construirte Verbindungslinie die Centrallinie der Kugeln in demselben Punkt, und dieser Punkt theilt die Centrallinie auf ihrer Verlängerung im Verhältniss der Radien der Kugeln. — Derselbe Satz gilt, wenn die parallelen Radien jedesmal entgegengesetzt gerichtet sind, doch liegt in diesem Fall der genannte Punkt auf der Centrallinie selbst. — Wie gestaltet sich der Satz, wenn die beiden Kugeln einander gleich sind? — Die genannten Punkte heissen die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kugeln, und zwar bezüglich äusserer und innerer Aehnlichkeitspunkt.

14. Jede von einem Aehnlichkeitspunkt zweier Kugeln (Aufg. 13) an eine derselben gezogene Berührungslinie berührt auch die andere. — Die Gesammtheit dieser gemeinschaftlichen Berührungslinien bildet die Seitenlinien eines gemeinschaftlichen Berührungskegels der Kugeln. — In welchem Fall wird der eine oder der andere solcher Berührungskegel zu einer Ebene, in welchem Fall wird er unmöglich? — In welchem Fall tritt an seine Stelle ein Berührungscylinder?

15. Jede gemeinschaftliche Berührungsebene zweier Kugeln geht durch einen Aehnlichkeitspunkt derselben. (Vergl. 12, 13.) — Durch jede Gerade, welche durch einen ausserhalb zweier Kugeln liegenden Aehnlichkeitspunkt der letzteren geht, und

die Kugeln nicht trifft, lassen sich zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen an dieselben legen.

Weitere Ausbildung dieser Sätze im Anschluss an die entsprechenden Lehren vom Kreise. Potenzebene zweier Kugeln, u. dgl. m.

Sätze vom Kreis auf die Kugel übertragen.

16. Legt man durch zwei Punkte der Peripherie eines grössten Kreises einer Kugel zwei andere grösste Kreise senkrecht zu dem ersteren und durch jeden dieser Punkte und einen beliebigen dritten Punkt der Peripherie des ersten Kreises, ebenfalls senkrecht zu seiner Ebene, je einen kleineren Schnittkreis der Kugel, so ist der Flächenwinkel der beiden senkrechten grössten Kreise zweimal so gross als der Flächenwinkel der beiden kleineren.

17. Die Ebenen zweier kleineren Kreise, welche durch je einen Endpunkt eines Durchmessers eines grössten Kreises derselben Kugel und durch einen und denselben beliebigen Punkt der Peripherie des letzteren senkrecht zu seiner Ebene gelegt werden können, stehen senkrecht zu einander.

18. Legt man durch eine Berührungslinie einer Kugel den zugehörigen grössten und einen kleineren Kreis, so ist die Peripherie des letzteren das geometrische Mittel zwischen der Peripherie des ersteren und derjenigen eines dritten Kreises, welcher zum Radius die Projection des durch den Berührungspunkt gehenden Radius des kleineren Kreises auf die Ebene des grössten hat, und ferner ist die Fläche des kleineren Kreises das geometrische Mittel zwischen der Fläche des grössten und derjenigen eines dritten Kreises, welcher die Hälfte jener Projection zum Radius hat.

19. Legt man durch die Seiten und die Diagonalen eines einem grössten Kugelkreise einbeschriebenen Vierecks je einen zu seiner Ebene senkrechten kleineren Kreis (Seitenkreise, Diagonalkreise), so ist das Product aus den Umfängen der Diagonalkreise gleich der Summe aus den Producten der Umfänge je zweier einander gegenüberliegenden Seitenkreise, und das Product aus den Flächen der Diagonalkreise ist gleich der Summe der Producte aus den Flächen je zweier einander gegenüberliegenden Seitenkreise plus dem doppelten Product aus den Flächen zweier Kreise, deren Radien die geometrischen Mittel zwischen je zwei Gegenseiten des Vierecks sind.

20. Legt man durch den Durchschnittskreis zweier sich schneidenden Kugeln eine Gerade, so schneiden ihre Durchschnittspunkte mit den Kugelflächen und dem Kreis auf ihr vier Strecken

von solchen Längen ab, dass das Rechteck aus der ersten und dritten gleich dem Rechteck aus der zweiten und vierten ist.

21. Legt man durch den Berührungspunkt zweier sich von aussen berührenden Kugeln eine Gerade und beschreibt um den Berührungspunkt mit beliebigem Radius eine dritte Kugel, so sind die zwischen den Durchschnittspunkten jener Geraden mit dieser Kugel und je einem der Durchschnittspunkte mit den beiden ersten Kugeln liegenden Strecken einander gleich.

22. Zieht man an eine Kugel, welche eine zweite von innen berührt, eine beliebige von der Oberfläche der letzteren begrenzte Berührungslinie und verbindet die beiden Endpunkte und den Berührungspunkt der Tangente mit dem Berührungspunkte der Kugeln, so halbirt die letztere Verbindungslinie den Winkel der beiden ersteren.

23. Zieht man durch zwei sich schneidende gleiche Kugeln eine Linie parallel zu der Centrallinie, so sind die zwischen entsprechenden Durchschnittspunkten mit den Kugeln liegenden Abschnitte der Parallelen gleich der Centrallinie.

24. Schneiden zwei Kugeln einander so, dass der Mittelpunkt der einen auf der Oberfläche der anderen liegt, und zieht man zu der Centrallinie derselben eine die beiden Kugeln schneidende parallele Gerade, so ist die Summe der nicht beiden Kugeln gemeinsamen Abschnitte dieser Linie gleich dem Durchmesser derjenigen Kugel, in deren Oberfläche der Mittelpunkt der anderen liegt.

25. Schneiden zwei Kugeln einander so, dass der Mittelpunkt der einen auf der Oberfläche der anderen liegt, und zieht man von einem Punkt der Peripherie ihres Durchschnittskreises durch die erstere Kugel den Durchmesser, so bildet die Linie, welche den Endpunkt dieses Durchmessers in der Ebene desselben und des Mittelpunkts der anderen Kugel mit der Peripherie des Durchschnittskreises verbindet, mit den beiden Radien eine stetige geometrische Proportion.

26. Zieht man von einem Punkte der Peripherie des Durchschnittskreises zweier Kugeln in jede derselben den Durchmesser, so trifft die Verbindungslinie der anderen Endpunkte dieser letzteren Linien ebenfalls die Peripherie des Durchschnittskreises.

Aehnliche Uebertragungen planimetrischer Sätze vom Kreis auf die Kugel, wie 16—26, lassen sich leicht in grosser Anzahl bilden.

Kreislinien auf d. Kugel; sphär. Dreiecke.

27. Von allen Ebenen, welche man durch zwei gegebene Punkte einer Kugelfläche legen kann, liefert die des zugehörigen grössten Kreises den kleinsten Bogen zwischen diesen Punkten.

28. Die drei Bogen grösster Kreise einer Kugel, welche die Winkel eines sphärischen Dreiecks halbiren, schneiden sich in einem und demselben Punkte. Die von ihm senkrecht zu den Seiten des Dreiecks gezogenen Bogen grösster Kreise sind einander gleich.

29. Die drei Bogen grösster Kreise einer Kugel, welche auf den Seiten eines sphärischen Dreiecks in den Halbirungspunkten derselben senkrecht stehen, schneiden sich in einem einzigen Punkte. Die von diesem Punkt nach den Eckpunkten des Dreiecks gehenden Bogen grösster Kreise sind einander gleich.

30. Stimmen zwei sphärische Dreiecke einer Kugel in zwei Seiten, aber nicht in dem eingeschlossenen Winkel überein, so liegt dem grösseren Winkel eine grössere Seite gegenüber.

31. Stimmen zwei sphärische Dreiecke einer Kugel paarweise in zwei Seiten, aber nicht in den dritten Seiten überein, so liegt der grösseren Seite ein grösserer Winkel gegenüber.

32. In jedem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ist jede Kathete mit dem gegenüberliegenden Winkel gleichartig (d. h. zugleich grösser oder kleiner als 90^0).

33. Ist in einem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck eine Kathete kleiner als 90^0, so ist die andere mit der Hypotenuse gleichartig; ist aber eine Kathete grösser als 90^0, so ist die andere mit der Hypotenuse ungleichartig.

34. Welche Lehrsätze über Congruenz und Symmetrie sphärischer Dreiecke lassen sich zu den betreffenden Lehrsätzen über die dreiseitige Ecke aufstellen?

35. Die um sphärische Dreiecke, welche paarweise in den Seiten übereinstimmen, beschriebenen Kreise auf der Kugelfläche sind einander gleich.

36. Symmetrische sphärische Dreiecke sind gleichgross.

37. In jedem sphärischen Viereck, um welches sich ein Kreis beschreiben lässt, ist die Summe zweier einander gegenüberliegenden Winkel gleich der Summe der beiden anderen Winkel.

38. Bei jedem, einem Schnittkreise einer Kugel einbeschriebenen sphärischen Vielecke von gerader Seitenzahl ist die

Summe des ersten, dritten, fünften u. s. w. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Winkels.

39. Bei jedem, einem Schnittkreise einer Kugel umbeschriebenen sphärischen Vielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe der ersten, dritten, fünften u. s. w. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Seite.

40. Bei allen sphärischen Dreiecken, welche über derselben Grundlinie nach derselben Seite hin einem Schnittkreis der Kugel einbeschrieben werden, ist der Unterschied zwischen dem Winkel an der Spitze und der Summe der an der Grundlinie liegenden Winkel unveränderlich.

41. Die Umkehrung des vorstehenden Satzes zu bilden und zu beweisen.

Einbeschriebene Körper.

42. Beschreibt man über einem Schnittkreis einer Kugel als Grundfläche einen Cylinder, dessen obere Grundfläche ebenfalls ein Schnittkreis der Kugel ist, so ist dieser Cylinder ein gerader. (Oder: Jeder einer Kugel einbeschriebene Cylinder ist gerade. — Umkehrung.)

43. Um jedes rechtwinkelige Parallelepipedon lässt sich eine Kugel beschreiben, (d. h. die Kugel geht durch seine sämmtlichen Eckpunkte). Erweiterung dieses Satzes auf andere Arten von Prismen.

44. Um jede abgestumpfte, gerade, dreiseitige Pyramide lässt sich eine Kugel beschreiben. — Erweiterung dieses Satzes.

b. Constructions-Aufgaben.

Constr. von Mittelpunkten und von Kugeln. Berührungs-Aufgaben.

45. Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, der von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung hat.

46. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel zu bestimmen, welche eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte derselben berührt.

47. Ebenso den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel, welche einen gegebenen Radius hat und eine gegebene Ebene berührt.

48. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel zu bestimmen, welche zwei gegebene Ebenen berührt, **a**) für parallele, **b**) für sich schneidende Ebenen.

49. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel

zu bestimmen, welche einen gegebenen Radius hat und eine gegebene Kugel berührt.

50. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel zu bestimmen, welche eine gegebene Kugel in einem gegebenen Punkte berührt.

51. An eine gegebene Kugel durch eine ausserhalb derselben gegebene Gerade eine Berührungsebene zu legen.

52. Um einen gegebenen Mittelpunkt eine Kugel zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

53. Um einen gegebenen Mittelpunkt eine Kugel zu construiren, welche eine gegebene Ebene berührt.

54. Um einen gegebenen Mittelpunkt eine Kugel zu construiren, welche eine gegebene Kugel berührt.

55. Um einen gegebenen Punkt eine Kugel zu beschreiben, welche von einer gegebenen Ebene in einem Kreise geschnitten wird, dessen Radius gegeben ist.

56. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel zu bestimmen, welche einen gegebenen Radius hat und von einer gegebenen Ebene in einem Kreise mit ebenfalls gegebenem Radius geschnitten wird.

57. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugel zu bestimmen, welche durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Radius hat.

58. Mit gegebenem Radius eine Kugel zu beschreiben, welche durch drei gegebene (nicht in gerader Linie liegende) Punkte geht.

59. Mit gegebenem Radius eine Kugel zu beschreiben, welche eine gegebene Ebene in einem bestimmten Punkte derselben berührt.

60. Mit gegebenem Radius eine Kugel zu beschreiben, welche eine gegebene Kugel in einem gegebenen Punkte berührt.

61. Eine Kugel zu construiren, welche eine gegebene Ebene (oder Kugel) in einem gegebenen Punkte derselben berührt und durch einen ausserhalb derselben gegebenen Punkt geht.

62. Eine Kugel zu construiren, welche durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt.

63. Eine Kugel zu construiren, welche vier gegebene Ebenen berührt.

Bildung ähnlicher Aufgaben! Apollonisches Problem der Berührung von Kugeln.

Constr. von Flächen an die Kugel.

64. In eine gegebene Kugel einen Schnittkreis von gegebenem Radius zu legen, **a**) beliebig (Bestimmung des geometrischen Orts seines Mittelpunktes), **b**) durch einen gegebenen Punkt.

65. In eine gegebene Kugel eine gerade quadratische Pyramide zu beschreiben, deren Höhe viermal so gross als eine Grundkante ist.

66. Um eine Kugel einen Kegel zu beschreiben, dessen Spitze in einem ausserhalb der Kugel gegebenen Punkte liegt. (Die Grundfläche soll die Kugel berühren.)

67. An zwei gegebene Kugeln einen gemeinschaftlichen Berührungskegel zu construiren.

68. An zwei gegebene Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Sphär. Dreieck.

69. Auf einer gegebenen Kugelfläche ein sphärisches Dreieck aus den (in Gradmass) gegebenen drei Seiten zu construiren.

70. Ebenso aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ein sphärisches Dreieck zu construiren.

71. Ebenso aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

72. Ebenso aus den drei Winkeln.

73. Auf einer gegebenen Kugelfläche ein sphärisches Dreieck zu construiren, wenn ein Eckpunkt und die Fusspunkte der auf die anliegenden Seiten von den anderen Eckpunkten bezüglich gefällten senkrechten Bogen grösster Kreise (Höhen) gegeben sind.

Bildung ähnlicher Aufgaben über Construction sphärischer Dreiecke aus drei Bestimmungsstücken.

Constr. in der Ebene.

74. Die Spitze eines geraden Kegels liege ausserhalb einer Kugel, und die Grundfläche des ersteren sei ein grösster Kreis der letzteren. Man soll eine der zweiten Durchschnittsfigur beider Körper congruente Figur construiren, wenn die Länge einer von der Spitze des Kegels an die Kugel gezogenen Berührungslinie und die Summe des Kugelradius und der Höhe des Kegels gegeben sind.

75. In eine Kugel sei ein gerader Cylinder und in diesen ein gerader Kegel auf derselben Grundfläche und mit derselben Höhe beschrieben. Man construire die Länge des Kugelradius aus einer Seitenlinie des Kegels und dem Umfange eines Axenschnitts des Cylinders.

76. Man construire der Gestalt und Grösse nach den Axenschnitt eines geraden, abgestumpften Kegels, welcher einer Kugel mit dem Radius r umbeschrieben ist, wenn ausser diesem Radius die Differenz d der Radien der Grundflächen des Kegels gegeben ist.

c. Rechnungs-Aufgaben.

Die Kugel für sich. α

77. Aus dem Radius r einer Kugel und dem Abstand p eines Schnittkreises derselben vom Mittelpunkt den Radius ϱ des Schnittkreises zu berechnen. $\alpha)\ r = 3{,}49;\ p = 1{,}8;\ \beta)\ r = 11{,}19;\ p = 8{,}25;\ \gamma)\ r = 89,\ p = 40{,}6.$

Umkehrungen dieser Aufgabe.

78. Es sind die Radien ϱ, ϱ_1 zweier Schnittkreise einer Kugel und das Verhältniss $m : n$ ihrer Abstände vom Mittelpunkt derselben gegeben; man berechne den Radius der Kugel. $\varrho = 7$, $\varrho_1 = 15$, $m : n = 6 : 5$.

Kugel mit anderen Körpern.

79. Um ein gerades, regelmässig-dreiseitiges Prisma, in welchem jede Seitenfläche gleich jeder Grundfläche ist, sei eine Kugel beschrieben. Wie gross ist der Radius derselben, wenn eine Grundkante des Prismas gleich a ist? $a = 355{,}168$.

80. In jeder der Grundflächen eines geraden Cylinders ist ein Durchmesser gezogen, so dass die durch je einen derselben gehenden Axenschnitte zu einander senkrecht stehen. Man kann die Endpunkte dieser Durchmesser als die Eckpunkte einer von gleichschenkeligen Dreiecken begrenzten dreiseitigen Pyramide (eines quadratischen Tetraëders) ansehen. Es soll der Radius der Kugel berechnet werden, welche durch diese Punkte geht, wenn die Kanten der Pyramide gleich $2r$ und a gegeben sind. $r = 28$, $a = 41$.

81. Eine Halbkugel und ein gerader Kegel, dessen Höhe doppelt so gross ist, als der Radius der ersteren, haben denselben Kreis zur Grundfläche; ihre Mäntel schneiden sich dann in einem Kreise. Wie gross ist dieser, und wie gross ist sein Abstand von der Grundfläche, wenn der Radius der letzteren gleich r ist? $r = 25$.

82. Eine Halbkugel und ein Kegel stehen auf derselben Grundfläche, deren Radius gleich r ist; die Höhe des Kegels ist dreimal so gross, als die der Halbkugel. In welcher Höhe über der Grundfläche kann man parallel mit dieser beide Körper durch eine Ebene so schneiden, dass die Durchschnittsfigur der Halb-

kugel m mal so gross ist, als die des Kegels, und wie gross sind die Halbmesser dieser Figuren? $m = 1$.

83. In einen Würfel, dessen Kante gleich a ist, sollen zwei Kugeln gelegt werden, welche einander und je drei (verschiedene) Würfelflächen berühren, und deren Radien sich wie $m : n$ verhalten. Wie gross sind diese Radien? $m : n = (7 + 3\sqrt{3}) : 11$.

84. Man gebe die Bedingung an, unter welcher sich in einen abgestumpften geraden Kegel eine die beiden Grundflächen und den Mantel desselben berührende Kugel legen lässt, und berechne und construire den Radius dieser Kugel aus den Radien der Grundflächen. $r = 4{,}4$; $r_1 = 9{,}9$.

85. Von einem geraden quadratischen Pyramidenstumpf sei die Länge der Kante der oberen Grundfläche gegeben. Die Seitenkante sei gleich der Diagonale der oberen Grundfläche. Eine Kugel, welche die untere Grundfläche berührt und durch die oberen Eckpunkte geht, werde in diesen von den vier Seitenkanten berührt. Wie gross ist die untere Grundfläche, wie gross der Radius der Kugel, und in welchem Verhältniss theilt der Mittelpunkt der Kugel die Höhe des Stumpfs?

86. Auf einer Ebene liegen vier gleichgrosse Kugeln so, dass ihre Mittelpunkte ein Quadrat bilden und jede derselben zwei benachbarte berührt. Man berechne aus dem Radius r den Radius der kleinsten Kugel, welche zwischen jenen so construirt werden kann, dass sie dieselben von aussen berührt, sowie den Radius der kleinsten Kugel, welche die vier ersteren sämmtlich umschliessend berührt.

87. Auf dem Boden eines Behälters von der Form eines regelmässig-sechsseitigen, geraden Prismas liegen sechs gleiche Kugeln so, dass jede zwei Seitenflächen und zwei benachbarte Kugeln berührt. Eine siebente Kugel ruht berührend auf sämmtlichen sechs Kugeln und berührt zugleich die obere Endfläche des Prismas. Wie verhält sich der Radius dieser siebenten Kugel zu dem Radius einer der sechs ersten, wenn der letztere den sechsten Theil der Höhe des Hohlraums des Behälters beträgt?

88. Um einen geraden Kegel, dessen Radius gleich r und dessen Höhe gleich h gegeben ist, sei eine Kugel beschrieben. In welchem Abstand von der Grundfläche des Kegels kann man durch beide Körper eine zu derselben parallele Schnittfläche so

legen, dass die Schnittfigur der Kugel $n\,(2)$ mal so gross als die des Kegels ist?

89. Aus den Flächeninhalten der Grenzflächen eines geraden dreiseitigen Prismas den Radius der demselben umbeschriebenen Kugel zu berechnen. Grundfläche: 262,08; Seitenflächen: 230,88; 75,85; 164,65.

90. In ein gerades Prisma, dessen Grundfläche sich ein Kreis einbeschreiben lässt, lasse sich eine Berührungskugel construiren; wie verhält sich die Summe der drei Seitenflächen zu der Summe der beiden Grundflächen?

91. In eine gerade, regelmässig-achtseitige Säule lasse sich eine Kugel construiren; wie verhält sich der Radius derselben zu dem Radius der demselben Prisma umbeschriebenen Kugel?

92. Aus einem Draht, dessen Querschnitt ein Kreis vom Radius r ist, sei ein kreisförmiger Ring gebogen, sodass der Radius des von der Axe des Drahtes gebildeten Kreises gleich R ist. Dieser Ring liege auf einer horizontalen Ebene und concentrisch mit ihm liege auf derselben Ebene eine Kugel vom Radius $\varrho < r$. Eine zweite Kugel ruhe auf der ersten und auf dem Ringe, beide berührend; wie gross ist der Radius derselben? $r = 0{,}42$, $R = 2{,}08$, $\varrho = 0{,}16$.

93. Von vier gleichgrossen Kugeln berührt jede zwei der übrigen, so dass ihre Mittelpunkte ein Quadrat bilden; alle vier werden von der Mantelfläche und der Grundfläche eines geraden Kegels berührt. Man berechne aus dem Radius und der Höhe des Kegels den Radius der Kugeln.

94. In einem geraden Cylinder, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist, stehen zwei Kegel, deren Grundflächen diejenigen des Cylinders sind, und deren gemeinschaftliche Spitze der Halbirungspunkt der Cylinderaxe ist. Man hat eine Kugel construirt, welche eine Grundfläche des Cylinders und die innere Flächenseite eines Kegelmantels berührt, sowie zwei einander gleiche Kugeln, von denen jede die andere von aussen, sowie je eine äussere Flächenseite eines Kegelmantels und die innere des Cylindermantels berührt. Wie gross ist die Summe der drei Kugelradien, wenn der Grundflächenradius des Cylinders gleich R ist?

95. In einen geraden Kegel sei eine Berührungskugel beschrieben. Eine zweite Kugel sei um die Spitze des Kegels mit der Seitenlinie als Radius beschrieben. Eine dritte Kugel end-

lich berühre die zweite von innen und den Kegelmantel in einem Kreise. Wie verhält sich der Radius der dritten Kugel zum Radius der ersten?

96. Einer Kugel mit dem Radius R sei ein gerader Kegel einbeschrieben, dessen Höhe gleich dem Radius seiner Grundfläche ist. In diesen Kegel sei eine den Mantel und die Grundfläche desselben berührende Kugel beschrieben. Wie gross ist der Radius einer dritten Kugel, welche die erste von innen und die zweite, sowie die Mantelfläche des Kegels von aussen berührt?

97. Aus dem Radius einer Kugel und den Seiten eines sphärischen Dreiecks derselben (in Gradmass) den Flächeninhalt des durch die Eckpunkte des letzteren bestimmten ebenen Dreiecks zu berechnen. $r = 100$; $\alpha = 21^0\ 19'\ 20''$; $\beta = 91^0\ 27'\ 0''$; $\gamma = 65^0\ 46'\ 36''$. β

98. In einem schiefen Kegel sei die Axe gleich a, der Neigungswinkel derselben gegen die Grundfläche gleich φ und der Radius der letzteren gleich r gegeben. Wie gross ist der Radius der dem Kegel umbeschriebenen Kugel? $a = 8{,}9$; $r = 4\frac{44}{55}$; $\varphi = 7^0\ 29'\ 12''{,}5$.

99. In eine Kugel mit dem Radius R ist ein Schnittkreis mit dem Radius r gelegt, und über letzterem ist ein Kegel construirt, dessen Spitze auf der Oberfläche des grösseren Kugelabschnittes liegt; die Axe des Kegels hat gegen die Grundfläche den Neigungswinkel φ. Man berechne die Länge der Axe und den Winkel an der Spitze des zur Grundfläche senkrechten Axenschnitts des Kegels, wobei nachzuweisen ist, dass der letztere nicht von dem Werthe von φ abhängt. $R = 54{,}5$; $r = 18{,}4$; $\varphi = 31^0\ 47'\ 52''$.

100. Zwei gerade Pyramiden haben gleiche quadratische Grundflächen, aber verschiedene Höhen; die Radien der in dieselben einzubeschreibenden Kugeln verhalten sich wie $m : n$, und die Neigungswinkel der Seitenflächen der ersten Pyramide gegen die Grundfläche sind gleich φ. Wie verhalten sich die Höhen der beiden Körper zu einander?

§. 13. Die regelmässigen Polyeder.

a. Lehrsätze.

1. Zieht man in jeder von zwei einander parallelen Grenzflächen eines Würfels eine Diagonale derart, dass die beiden

Diagonalen einander nicht parallel sind, und legt durch jede derselben und je einen Endpunkt der anderen eine Ebene, so begrenzen die so erhaltenen vier Schnittflächen ein regelmässiges Tetraëder.

2. Die Mittelpunkte der sechs Grenzflächen jedes Würfels sind die Eckpunkte eines regelmässigen Oktaëders.

3. Die Mittelpunkte der acht Grenzflächen jedes regelmässigen Oktaëders sind die Eckpunkte eines Würfels.

4. Die Halbirungspunkte der sechs Kanten eines regelmässigen Tetraëders sind die Eckpunkte eines regelmässigen Oktaëders.

5. Erweitert man vier Grenzflächen eines regelmässigen Oktaëders, von denen keine zwei in einer Kante aneinanderstossen, bis sie für sich einen Körper einschliessen, so ist dieser ein regelmässiges Tetraëder.

6. Die vier Höhen eines jeden regelmässigen Tetraëders sind einander gleich und schneiden sich in demselben Punkte. Dieser Punkt theilt jede der Höhen im Verhältniss 1 : 3, so dass der grössere Abschnitt dem Eckpunkt anliegt.

7. Wenn man von einem beliebigen Punkte im Innern eines regelmässigen Tetraëders auf die vier Flächen desselben senkrechte Gerade fällt, so ist die Summe dieser Perpendikel gleich der Höhe des Tetraëders.

8. In jedem regelmässigen Oktaëder giebt es drei Linien, welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte verbinden; dieselben sind gleichlang, schneiden sich in demselben Punkte (dem Mittelpunkt des Oktaëders) und stehen zu einander senkrecht.

9. Die acht Grenzflächen eines jeden regelmässigen Oktaëders bilden vier Paare einander paralleler Ebenen. Je zwei parallele Grenzflächen haben denselben Abstand von einander.

10. In jedem regelmässigen Ikosaëder kann jeder Eckpunkt als Spitze einer regelmässigen fünfseitigen Pyramide angesehen werden, deren Seitenflächen die fünf in jenem Punkte zusammenstossenden Ikosaëderflächen sind. Die Grundflächen dieser zwölf Pyramiden schliessen ein regelmässiges Pentagonaldodekaëder ein.

11. Legt man durch die Endpunkte je dreier von demselben Eckpunkt ausgehenden Kanten eines regelmässigen Pentagonaldodekaëders eine Ebene, so schliessen diese Ebenen ein regelmässiges Ikosaëder ein.

12. Verbindet man zwei einander diametral gegenüberliegende Eckpunkte eines regelmässigen Ikosaëders mit einem dritten Eckpunkt desselben, so schliessen die Verbindungslinien einen rechten Winkel ein.

13. Die Verlängerungen von je fünf Kanten eines regelmässigen Dodekaëders, welche von den Eckpunkten derselben Seitenfläche ausgehen und nicht in dieser liegen, schneiden sich in demselben Punkt. Theilt man eine der Verlängerungen (bis zu ihrem Durchschnittspunkt mit den anderen gerechnet) nach dem goldenen Schnitt, so ist der grössere Abschnitt gleich der Kante des Dodekaëders.

14. Setzt man auf jede Fläche eines Würfels als Grundfläche eine gerade Pyramide, deren Seitenflächen gegen die Grundfläche Neigungswinkel von 45 Grad haben, so erhält man einen von zwölf congruenten Rhomben begrenzten Körper. (Rhombendodekaëder.) Was für einen Körper erhält man durch ein entsprechendes Verfahren aus dem regelmässigen Oktaëder?

15. Durch eine Kante AD eines regelmässigen Oktaëders $ABCDEF$ sei ein ebener Schnitt $AGHD$ gelegt. Man beweise, dass dieser Schnitt ein Trapez ist, und dass seine Diagonalen sich in demselben Punkte J mit der Hauptaxe EF des Oktaëders schneiden. — Es sei ferner der Punkt H mit B und G mit C, und sodann der Durchschnittspunkt K der beiden Verbindungslinien mit J verbunden; man soll beweisen, dass JK parallel zu AB ist. — Das Oktaëder zu construiren, wenn GH und JK gegeben sind.

b. Constructions-Aufgaben.

Netze.

16. Das Netz eines regelmässigen Tetraëders aus der Kante a desselben zu construiren.

17. Ebenso das Netz eines regelmässigen Oktaëders.

18. Ebenso das Netz eines regelmässigen Ikosaëders.

19. Ebenso das Netz eines Würfels.

20. Ebenso das Netz eines regelmässigen Pentagonaldodekaëders.

Schnittfiguren; Constr. in d. Ebene.

21. Von einem regelmässigen Tetraëder sei eine Kante gegeben; man soll denjenigen Schnitt desselben der Gestalt und Grösse nach construiren, welcher durch einen Punkt einer Kante gelegt ist, durch den diese im gegebenen Verhältniss $m : n$ ge-

theilt wird, und welcher parallel zu der nicht anliegenden Kante und senkrecht auf eine gegenüberliegende Fläche ist.

22. Durch ein regelmässiges Oktaëder sei ein ebener Schnitt gelegt, welcher eine Kante halbirt und senkrecht zu derselben steht; man soll diesen Schnitt der Gestalt und Grösse nach aus der Kante a des Oktaëders construiren.

23. Aus der Kante a eines regelmässigen Oktaëders diejenige Schnittfigur desselben zu construiren, welche zwei von einem Eckpunkt ausgehende Kanten und eine an keine der letzteren angrenzende, von dem gegenüberliegenden Eckpunkt ausgehende Kante halbirt.

24. Durch die Verbindungslinie zweier einander diametral gegenüberliegenden Eckpunkte eines regelmässigen Ikosaëders und eine ihr anliegende Kante desselben sei ein ebener Schnitt gelegt; man soll die Schnittfigur aus der gegebenen Kante construiren.

25. Diejenige ebene Schnittfigur eines regelmässigen Dodekaëders aus der Kante desselben zu construiren, welche durch eine Kante geht und den an dieser liegenden Flächenwinkel halbirt.

Constr. der Körper.

26. Ein regelmässiges Tetraëder aus einer Höhe desselben zu construiren.

27. Ein regelmässiges Oktaëder aus einer durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte desselben gehenden Axe zu construiren.

28. Ebenso ein regelmässiges Ikosaëder.

29. In eine gegebene Kugel ein regelmässiges Tetraëder zu beschreiben.

30. Um eine gegebene Kugel ein regelmässiges Tetraëder zu construiren.

31. Um eine gegebene Kugel ein regelmässiges Oktaëder zu construiren.

32. Um eine gegebene Kugel ein regelmässiges Ikosaëder zu construiren.

33. Um eine gegebene Kugel ein regelmässiges Pentagonaldodekaëder zu construiren.

34. In eine gegebene Kugel ein regelmässiges Pentagonaldodekaëder zu construiren.

35. Durch die Halbirungspunkte sämmtlicher Kanten eines jeden regelmässigen Ikosaëders lässt sich eine Kugel legen; man construire die Kante des Ikosaëders aus dem gegebenen Radius der Kugel.

c. Rechnungs-Aufgaben.

36. Man soll aus der Kante a eines regelmässigen Polyeders den Radius R der Kugel, welche durch alle Eckpunkte desselben geht, ferner den Radius r derjenigen Kugel, welche alle Flächen desselben berührt, und endlich den Abstand d des Mittelpunktes von den Kanten berechnen. α Dimensionen.

37. In eine und dieselbe Kugel sei ein regelmässiges Oktaëder und ein Würfel beschrieben. Wie verhalten sich die Radien der diesen Körpern einbeschriebenen Kugeln zu einander? Welcher Lehrsatz lässt sich also aufstellen?

38. Ebenso für ein Dodekaëder und ein Ikosaëder.

39. Ein regelmässiges Oktaëder sei parallel zu zwei einander parallelen Seitenflächen desselben und in gleichem Abstande von ihnen durch eine Ebene geschnitten. Welche Gestalt hat die Durchschnittsfigur, und wie gross ist dieselbe, wenn der Inhalt einer Oktaëderfläche gleich F ist? Oktaëder u. Tetraëder.

40. Zu zwei einander parallelen Flächen eines regelmässigen Oktaëders sind parallele Schnitte gelegt. Man berechne den Umfang und den Flächeninhalt eines solchen aus der Oktaëderkante a und dem Abstand d des Schnitts vom Mittelpunkt.

41. Durch die Halbirungspunkte von vier Kanten eines regelmässigen Tetraëders, welche von den Endpunkten einer fünften Kante ausgehen, lässt sich ein ebener Schnitt legen; derselbe ist ein Quadrat. Man berechne den Umfang irgend eines der Ebene dieses Quadrats parallelen Schnittes des Tetraëders aus dem Umfange des ersteren.

42. In den Raum zwischen einer Fläche eines regelmässigen Tetraëders und der Oberfläche der letzterem umbeschriebenen Kugel sei die grösste, beide Flächen berührende Kugel gelegt. Wie verhält sich der Radius derselben zu dem Radius der dem Tetraëder einbeschriebenen Kugel?

43. Eine Grenzfläche eines regelmässigen Tetraëders sei durch eine zu einer Seite derselben parallele Gerade so getheilt, dass sich das abgeschnittene Dreieck zu dem ganzen wie $m : n$ verhält. Durch die Theilungslinie und den gegenüberliegenden Eckpunkt des Tetraëders sei ein ebener Schnitt gelegt. Wie verhält sich der Flächeninhalt desselben zu demjenigen einer Tetraëderfläche? $m : n = 1 : 9$.

44. Durch zwei diametral gegenüberliegende Eckpunkte eines regelmässigen Oktaëders und durch den Halbirungspunkt einer Kante desselben ist ein ebener Schnitt gelegt. Wie verhält sich der Inhalt desselben zum Inhalt einer Grenzfläche des Oktaëders?

45. In ein regelmässiges Oktaëder ist ein Würfel so gestellt, dass seine Eckpunkte auf den acht von zwei einander gegenüberliegenden Eckpunkten des Oktaëders auslaufenden Kanten des letzteren liegen. Wie verhält sich die Kante des Würfels zur Oktaëderkante?

Ikosaëder. 46. Ein Eckpunkt eines regelmässigen Ikosaëders sei zur Spitze, und das durch die Endpunkte der vom gegenüberliegenden Eckpunkt ausgehenden Kanten bestimmte regelmässige Fünfeck sei zur Grundfläche einer Pyramide gemacht worden; wie verhält sich eine Seitenfläche dieser Pyramide zu einer Grenzfläche des Ikosaëders?

Dodekaëder. 47. Man vergleiche diejenigen ebenen Schnitte eines regelmässigen Pentagonaldodekaëders nach Inhalt und Umfang mit einander, welche einer Seitenfläche parallel sind, und von denen der erste fünf von den Eckpunkten dieser Fläche ausgehende Kanten halbirt, der zweite durch die anderen Endpunkte dieser Kanten, der dritte durch die Halbirungspunkte von zehn anderen Kanten des Dodekaëders geht.

β 48. Man berechne den Neigungswinkel zweier aneinander stossenden Seitenflächen **a**) für ein regelmässiges Tetraëder, **b**) für ein regelmässiges Oktaëder, **c**) für ein regelmässiges Ikosaëder und **d**) für ein regelmässiges Pentagonaldodekaëder.

49. Welche Winkel bildet eine Höhe eines regelmässigen Tetraëders mit den von demselben Eckpunkt ausgehenden Kanten?

50. Ueber einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche sei ein regelmässiges Tetraëder, sowie eine andere gerade dreiseitige Pyramide construirt. In welchem Verhältniss muss die Höhe des ersteren zur Höhe der Pyramide stehen, damit der Winkel zweier Kanten an der Spitze der Pyramide den dritten Theil des entsprechenden Winkels an der Spitze des Tetraëders betrage?

51. Ein regelmässiges Tetraëder, dessen Kantenlänge gleich a gegeben ist, sei durch eine Ebene getheilt, in welcher sich eine Kante und der Halbirungspunkt der gegenüberliegenden befinden. Wie gross sind die Winkel und der Inhalt der Durchschnittsfläche?

52. Durch eine Kante eines regelmässigen Tetraëders soll ein ebener Schnitt in dasselbe gelegt werden, welcher eine Grenzfläche des Tetraëders im Verhältniss $m : n$ theile. Unter welchem Winkel gegen eine jener Kante anliegende Fläche ist dieser Schnitt zu legen? $m : n = 1 : 2$.

53. Setzt man auf jede Fläche eines Würfels als Grundfläche eine gerade Pyramide von solcher, für alle sechs gleichen Höhe, dass je zwei in einer Würfelkante zusammenstossende Seitenflächen zweier Pyramiden in eine Ebene fallen, so entsteht ein von zwölf congruenten Rhomben begrenzter Körper. (A. 14.) Man berechne aus der Kante a des Würfels die Höhe jener Pyramiden, sowie die Seiten und die Winkel der Rhomben.

54. Dieselbe Aufgabe, wie 53, für ein regelmässiges Oktaëder.

55. In eine fünfseitige Pyramide, welche mittelst eines ebenen Schnittes durch fünf Kanten eines regelmässigen Ikosaëders von diesem abgeschnitten werden kann, sei eine Kugel beschrieben; man berechne (mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln oder ohne dieselben) den Radius dieser Kugel aus der Länge der Kanten.

§. 14. Von den Körpern im Allgemeinen.

Lehrsätze.

Congruenz, Symmetrie u. Aehnlichkeit.

1. Von allen Eckpunkten eines beliebigen Polyeders seien auf eine Ebene senkrechte Linien gefällt, und jede derselben sei über ihren Fusspunkt um ihre eigene Länge verlängert; die Endpunkte der Verlängerungen bilden die Eckpunkte eines dem gegebenen symmetrischen Körpers. (Spiegelbild.)

2. Von allen Eckpunkten eines Polyeders seien nach einer beliebigen Richtung unter sich parallele und gleichlange Linien gezogen; die Endpunkte dieser Linien bilden die Eckpunkte eines dem ersteren congruenten Körpers.

3. Durch einen beliebigen Punkt seien gerade Linien nach allen Eckpunkten eines Polyeders gezogen, und jede derselben sei über diesen Punkt um ihre eigene Länge verlängert; die Endpunkte der Verlängerungen bilden die Eckpunkte eines dem gegebenen symmetrischen Körpers.

4. Durch einen beliebigen Punkt seien gerade Linien nach allen Eckpunkten eines Polyeders gezogen, und diese Linien seien durch Punkte, welche sämmtlich zwischen ihren Endpunkten oder

sämmtlich auf ihren Verlängerungen über die Eckpunkte des Polyeders liegen, in demselben Verhältniss getheilt; die Theilpunkte bilden die Eckpunkte eines dem gegebenen ähnlichen Polyeders.

5. Liegen die Theilpunkte der vorigen Aufgabe dagegen sämmtlich auf den Verlängerungen der Verbindungslinien über ihren gemeinschaftlichen Ausgangspunkt, so bilden sie die Eckpunkte eines Polyeders, welches einem dem gegebenen symmetrischen Körper ähnlich ist.

6. Symmetrische Körper lassen sich so zusammenstellen, dass jede Verbindungslinie zweier einander entsprechenden Punkte durch eine und dieselbe, zu allen diesen Linien senkrechte Ebene halbirt wird.

7. Symmetrische Körper lassen sich so zusammenstellen, dass die Verbindungslinien je zweier homologen Punkte sich in demselben Punkte schneiden; dieser Punkt halbirt jene Verbindungslinien. Homologe Linien in beiden Körpern sind in diesem Fall einander (entgegengesetzt) parallel.

8. Congruente Körper lassen sich so zusammenstellen, dass alle Verbindungslinien je zweier homologen Punkte einander parallel und gleich sind. Je zwei homologe Linien und je zwei homologe Flächen beider Körper sind dann einander parallel.

9. Aehnliche Körper lassen sich so zusammenstellen, dass alle Verbindungslinien je zweier homologen Punkte derselben sich in einem einzigen Punkte schneiden. Je zwei homologe Linien oder Flächen beider Körper sind dann einander parallel.

10. Alle regelmässigen Polyeder von gleicher Flächenzahl sind einander ähnlich. — Alle Kugeln sind einander ähnlich.

11. Zwei dreiseitige Pyramiden sind ähnlich, **a**) wenn die homologen Seitenflächen ähnlich sind. Ebenso, **b**) wenn die homologen Kanten einander proportional sind, **c**) wenn die homologen Flächenwinkel gleich sind, **d**) wenn zwei Ecken bezüglich congruent und die homologen Kanten derselben einander proportional sind.

12. Aehnliche Polyeder lassen sich in gleichviele einander bezüglich ähnliche Pyramiden zerlegen.

Anwendungen des Euler'schen Lehrsatzes u. dgl.

13. Die Anzahl aller ebenen Winkel der Oberfläche eines convexen Polyeders ist doppelt so gross als die Anzahl seiner Kanten.

Zusatz 1: Die Anzahl der ebenen Winkel der Oberfläche eines convexen Polyeders ist stets gerade.

Zusatz 2: Flächen von ungerader Eckenzahl und Ecken von ungerader Seitenzahl können in der Oberfläche eines convexen Polyeders nur in gerader Anzahl vorkommen.

14. Die Summe aller ebenen Winkel der Oberfläche eines convexen Polyeders beträgt so viel Rechte, als das um 8 verminderte Vierfache der Anzahl der Ecken Einheiten hat.

15. In jedem convexen Polyeder ist das Dreifache der Anzahl sowohl der Ecken als der Grenzflächen nicht kleiner als die um 6 vermehrte Anzahl der Kanten, und nicht grösser als die doppelte Anzahl der Kanten.

16. Das Doppelte der Anzahl der Ecken eines convexen Polyeders ist eben so gross oder kleiner als die vierfache Anzahl der Grenzflächen vermindert um 8, und eben so gross oder grösser als die um 4 vermehrte Anzahl der Grenzflächen.

17. Das Doppelte der Anzahl der Grenzflächen eines convexen Polyeders ist nicht grösser als das Vierfache der Anzahl der Ecken minus 8, und nicht kleiner als die Anzahl der Ecken plus 4.

18. An einem convexen Polyeder können nicht alle Flächen mehr als fünfseitig, und nicht alle Ecken mehr als fünfseitig sein.

19. Es giebt kein Polyeder von sieben Kanten.

20. Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines convexen Polyeders beträgt eben so viel oder mehr Rechte als das Doppelte der Anzahl der Grenzflächen, und eben so viel oder weniger als das um 24 verminderte Achtfache der Anzahl der Grenzflächen.

21. Bei keinem convexen Polyeder können dreiseitige Flächen und dreiseitige Ecken zugleich fehlen; es sind deren zusammen wenigstens 8 vorhanden.

22. Ein convexes Polyeder ohne dreiseitige und vierseitige Flächen hat mindestens 12 fünfseitige Flächen; ein solches ohne dreiseitige und vierseitige Ecken hat mindestens 12 fünfseitige Ecken..

23. Ein convexes Polyeder ohne dreiseitige und fünfseitige Flächen hat mindestens 6 vierseitige Flächen; ein solches ohne dreiseitige und fünfseitige Ecken hat mindestens 6 vierseitige Ecken.

24. Ein convexes Polyeder ohne vierseitige und fünfseitige Flächen hat mindestens 4 dreiseitige Flächen; ein solches ohne vierseitige und fünfseitige Ecken hat mindestens 4 dreiseitige Ecken.

25. Ein convexes Polyeder ohne dreiseitige und vierseitige Flächen hat mindestens 20 dreiseitige Ecken; ein solches ohne dreiseitige und vierseitige Ecken hat mindestens 20 dreiseitige Flächen.

26. Jedes convexe Polyeder, dessen Flächen fünfseitig und dessen Ecken dreiseitig sind, hat 20 Ecken. Jedes convexe Polyeder, dessen Ecken fünfseitig und dessen Flächen dreiseitig sind, hat 20 Flächen.

27. Jedes von vier Flächen begrenzte Polyeder hat 6 Kanten und 4 Ecken; seine Grenzflächen sind sämmtlich Dreiecke.

28. Jedes von fünf Flächen begrenzte convexe Polyeder hat entweder 8 Kanten und 5 Ecken oder 9 Kanten und 6 Ecken.

V. Capitel. Berechnung von Oberflächen.

§. 15. Oberfläche von Polyedern.

Prisma. 1. Die Oberfläche eines geraden Prismas mit quadratischer Grundfläche zu berechnen, dessen Grundkante gleich a, und dessen Seitenkante gleich b ist. $\alpha)$ $a = 17{,}5$; $b = 32{,}4$; $\beta)$ $a = 3\frac{3}{4}$; $b = 2\frac{1}{5}$; $\gamma)$ $a = 0{,}02$; $b = 0{,}57$.

2. Die Oberfläche eines geraden, regelmässig-sechsseitigen Prismas aus der Grundkante a und der Seitenkante b zu berechnen. $\alpha)$ $a = 0{,}56$; $b = 3{,}21$; $\beta)$ $a = 7\frac{1}{2}$, $b = 5\frac{2}{3}$.

3. Desgleichen für ein gerades, regelmässig-achtseitiges Prisma. $\alpha)$ $a = 3{,}421$; $b = 6{,}845$; $\beta)$ $a = 0{,}21$; $b = 0{,}08$.

4. Die Oberfläche eines geraden Parallelepipedon mit quadratischer Grundfläche zu berechnen, wenn der Umfang u einer Diagonalebene und eine Diagonale d der letzteren gegeben sind. (Zwei Fälle.) $u = 21$; $d = 7\frac{1}{2}$.

5. Von einem rechtwinkeligen Parallelepipedon ist das Verhältniss dreier an einer Ecke zusammenstossender Kanten gleich $a : b : c$ und eine Diagonale d der Grundfläche $(a\ b)$ gegeben; man soll seine Oberfläche berechnen. $a : b : c = 3 : 4 : 5$; $d = 15$.

6. Durch ein rechtwinkeliges Parallelepipedon mit quadratischer Grundfläche sei ein ebener Schnitt gelegt, welcher durch eine Kante der oberen Grundfläche geht und gegen diese unter einem Winkel von 45 Grad geneigt ist; man soll die Oberfläche des auf der unteren Grundfläche stehenden abgestumpften Prismas aus den Kanten des ursprünglichen (a, h) berechnen. $a = 5$, $h = 12$.

7. Aus einem geraden, regelmässig-dreiseitigen Prisma, dessen Grundkante gleich a ist, sei durch zwei zu einander parallele Ebenen ein schiefes Prisma herausgeschnitten, dessen Seitenkante gleich b ist. Man berechne die Summe der Inhalte der Seitenflächen dieses schiefen Prismas.

8. Die Oberfläche eines geraden dreiseitigen Prismas aus seinen Kanten zu berechnen. Grundkanten: 40; 13; 37; Seitenkanten: 50.

9. Von einem geraden, regelmässig-zehnseitigen Prisma, dessen Seitenkanten den Grundkanten gleich sind, sei die Oberfläche gegeben; man berechne die Länge einer Kante.

10. In ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche sei ein anderes so einbeschrieben, dass seine Eckpunkte die Grundkanten des ersteren halbiren; man berechne die Oberfläche des letzteren Prismas aus den Kanten des ersteren.

11. Die Oberfläche einer geraden, regelmässig-sechsseitigen Pyramide. Pyramide aus der Grundkante a und der Höhe h derselben zu berechnen. $a = 3{,}4$; $h = 6{,}8$.

12. Von einer geraden, quadratischen Pyramide, deren Höhe gleich h und deren gesammte Oberfläche gleich O ist, soll eine Grundkante berechnet werden. $h = 24$, $O = 1440$.

13. Die Oberfläche einer geraden, regelmässig-dreiseitigen Pyramide, deren Höhe doppelt so gross als eine Grundkante ist, sei gegeben; man soll die Grundkante berechnen. $O = 266{,}435$.

14. Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist parallel der letzteren abgestumpft. Man soll aus dem Inhalt f der Abstumpfungsfläche, der Höhe h der ganzen und der Höhe p der abgestumpften Pyramide die Oberfläche der letzteren berechnen. $f = 5625$; $h = 231$; $p = 154$.

15. Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist der Inhalt F eines durch zwei gegenüberstehende Seitenkanten gelegten Schnittes und der Umfang u der Grundfläche

gegeben. Man soll die Oberfläche der Pyramide berechnen. $F = 12{,}6491$; $u = 8$.

16. Die Oberfläche einer geraden, regelmässig-dreiseitigen Pyramide aus einer Seitenkante s und der Höhe h zu berechnen. $s = 8{,}5$; $h = 7{,}7$.

17. Die Oberfläche einer Pyramide zu berechnen, welche mit einem geraden, quadratischen Prisma die Grundfläche $(= g^2)$ gemeinsam hat, und deren Spitze im Mittelpunkt der oberen Grundfläche des Prismas liegt, wenn die Kanten des letzteren (g, h) gegeben sind. $g = 3{,}1$; $h = 4{,}68$.

18. Die Oberfläche einer geraden, regelmässig-fünfseitigen Doppelpyramide zu berechnen, wenn der Abstand der beiden Spitzen gleich p und eine Seitenkante gleich l gegeben ist. $l = p = 4$.

19. Von einer schiefen dreiseitigen Pyramide seien die Grundkanten, die Höhe und die Abstände des Fusspunktes der letzteren von den Ecken der Grundfläche bekannt; man soll ihre Oberfläche berechnen. (Eine Bedingungsgleichung zwischen bekannten Stücken!)

20. Eine dreifach rechtwinkelige Ecke ist durch eine Ebene so geschlossen, dass letztere ein gleichseitiges Dreieck bildet. Man soll die Oberfläche der entstandenen Pyramide aus einer Seite a dieses Dreiecks berechnen. $a = 1{,}30026$.

21. Die Flächen einer dreifach rechtwinkeligen Ecke sind durch zwei parallele Ebenen, welche beide gleichseitige Dreiecke bilden, deren Seiten a, b bekannt sind, geschnitten. Die Oberfläche der zwischen den beiden Ebenen liegenden abgestumpften Pyramide soll berechnet werden. $a = 8{,}3628$; $b = 10{,}1621$.

22. Die Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide aus den Kanten derselben zu berechnen. Insbesondere, wenn je zwei einander gegenüberliegende Kanten gleichlang sind. Die Längen dieser Kanten seien bezüglich $a = 40$, $b = 13$, $c = 37$.

Regelm. Polyeder.

23. Aus einer Kante a zu berechnen die Oberfläche **a**) eines regelmässigen Tetraëders, **b**) eines regelmässigen Oktaëders, **c**) eines regelmässigen Ikosaëders, **d**) eines regelmässigen Pentagonaldodekaëders.

24. Aus der Kante a eines regelmässigen Tetraëders die Kante eines regelmässigen Oktaëders zu construiren und zu berechnen, welches mit jenem gleiche Oberfläche hat.

25. Wie verhält sich die Oberfläche eines Würfels zu der Oberfläche desjenigen regelmässigen Tetraëders, dessen Kanten Diagonalen der Grenzflächen jenes Würfels sind?

26. Wie verhält sich die Oberfläche eines regelmässigen Oktaëders zu der Oberfläche des durch Erweiterung von vier abwechselnden Grenzflächen desselben entstehenden Tetraëders?

27. In einen Würfel sei ein Oktaëder gestellt, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Würfelflächen sind. Man berechne aus der Oberfläche des Würfels diejenige des Oktaëders.

§. 16. Oberfläche des geraden Cylinders.

Im Folgenden bedeute M die Masszahl für den Mantel, O für die gesammte Oberfläche, r den Radius und h die Höhe eines geraden Cylinders.

Man berechne:

Einfache Anwendung der Formeln.

1. M aus h und r für $\alpha)$ $r = 22{,}6$; $h = 15{,}4$; $\beta)$ $r = 0{,}7$; $h = 5{,}65$.

2. h aus M und r. $\alpha)$ $M = 5882{,}9$; $r = 23{,}46$; $\beta)$ $M = 4{,}9224$; $r = 0{,}483$.

3. r aus M und h. $\alpha)$ $M = 60{,}222$; $h = 4{,}89$; $\beta)$ $M = 1015360$; $h = 808$.

4. M für $h = r$. $r = 11{,}3$.

5. h aus O und r. $\alpha)$ $O = 340{,}608$; $r = 3{,}9$; $\beta)$ $O = 2115{,}48$; $r = 8{,}7$.

6. r aus O und M. $O = 400$; $M = 92{,}124$.

7. r aus O und h. $\alpha)$ $O = 408160$; $h = 732$; $\beta)$ $O = 1583360$; $h = 230$.

8. h aus O und M. $O = 150{,}796$; $M = 94{,}2478$.

Zusammengesetzte Aufgaben.

9. Man berechne den Mantel M eines Cylinders, der einem gegebenen Würfel umbeschrieben ist, aus der Kante a des letzteren und construire einen diesem Mantel inhaltsgleichen Kreis.

10. Ebenso für einen dem Würfel einbeschriebenen Cylinder.

11. Einen Kreis zu construiren, dessen Flächeninhalt gleich dem des Mantels eines gegebenen geraden Cylinders sei.

12. Um wieviel muss die Höhe eines geraden Cylinders verlängert werden, damit der Mantel desselben seiner Gesammtoberfläche vor der Verlängerung gleich werde?

13. Die Höhe eines geraden Cylinders zu bestimmen, dessen Mantel gleich der Summe der Mäntel dreier gegebenen Cylinder,

und dessen Grundfläche einem gegebenen gleichseitigen Dreieck einbeschrieben sei.

14. Zu einem gegebenen geraden Cylinder soll ein gerades quadratisches Prisma von gleicher Oberfläche und Höhe construirt werden; die Grundkante des letzteren zu berechnen. $r = 7{,}7027$; $h = 16{,}1$.

15. Aus einem geraden Cylinder, dessen Radius gleich r gegeben ist, sei durch zwei zu einander parallele, zur Grundfläche schiefe Ebenen ein Stück herausgeschnitten, dessen Seitenlinie gleich a bekannt ist; man soll den Mantel des abgeschnittenen Stückes berechnen.

16. Die Diagonale des Axenschnittes eines geraden Cylinders ist gleich d, der Mantel desselben gleich M gegeben. In dem Cylinder soll eine gerade, regelmässig-achtseitige Pyramide so stehen, dass ihre Spitze im Mittelpunkt der einen Grundfläche liegt, und ihre Grundfläche der anderen Grundfläche des Cylinders einbeschrieben ist. Man soll die Grundkante der Pyramide berechnen. — Welches Resultat erhält man, wenn M gleich der Fläche eines Kreises mit dem Durchmesser d ist? Man construire für diesen Fall die Kante aus d.

17. Ein Cylinder, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist, sei mittelst einer geraden Cylinderfläche, welche mit ihm die Axe gemeinsam hat, ausgehöhlt. Der Radius der Grundfläche des äusseren Mantels sei gleich r gegeben; die Mäntel der beiden Cylinder verhalten sich wie $m : n$. Wie gross ist die gesammte Oberfläche des ausgehöhlten Körpers? $m : n = 2 : 3$; $r = 5{,}35237$.

18. Drei gerade Cylinder, deren Axen in derselben Geraden liegen, stehen so auf einander, dass die untere Grundfläche jedes folgenden in der Ebene der oberen Grundfläche des vorhergehenden liegt. Man soll die gesammte Oberfläche des durch die Vereinigung dieser Cylinder entstandenen Körpers unter der Voraussetzung berechnen, dass die Höhe jedes folgenden doppelt so gross als die des vorhergehenden, der Radius jedes folgenden halb so gross als der des vorhergehenden, und der Axenschnitt des ersten ein Quadrat sei, dessen Inhalt gleich F gegeben ist. $F = 9{,}09457$.

Theile des Cylinders.

19. Ein gerader Cylinder ist durch eine zu seiner Axe parallele Ebene in einem Abstande von derselben, welcher gleich dem halben Radius der Grundfläche ist, durchschnitten. Man berechne die Oberflächen der beiden Theile des Cylinders.

20. Die Gesammt-Oberfläche eines Ausschnitts eines geraden Cylinders mit dem Radius r und der Höhe h zu berechnen, welcher durch zwei Ebenen entsteht, die sich in der Cylinderaxe unter einem Winkel von 36 Grad schneiden.

21. Durch eine Sehne des Grundkreises eines geraden Cylinders mit dem Radius r und der Höhe h, deren Centriwinkel gleich α gegeben ist, sei eine zu der Grundfläche senkrechte Ebene gelegt. Wie verhalten sich die krummen Oberflächen der durch dieselbe gebildeten Theile des Cylinders zu einander? $\alpha = 80^0$.

22. Der Grundfläche eines geraden Cylinders sei ein Viereck einbeschrieben, dessen Seiten bezüglich gleich a, b, c, d gegeben sind; die Höhe des Cylinders sei gleich h. Wie gross ist die gesammte Oberfläche des Körpers, welcher entsteht, wenn man den Cylinder durch ein gerades Prisma aushöhlt, dessen Grundfläche ein Viereck mit denen des ersteren paarweise parallelen Seiten ist, wenn dieses Viereck einem der Grundfläche des Cylinders concentrischen Kreise mit dem Radius r_1 einbeschrieben wurde?

§. 17. Oberfläche des geraden Kegels.

Es bezeichne im Folgenden M den Inhalt der krummen Mantelfläche, O die gesammte Oberfläche, R den Radius der Grundfläche, S die Seitenlinie, H die Höhe eines vollständigen geraden Kegels, r den Radius eines Schnittkreises desselben, s die Seitenlinie, h die Höhe, O_1 die gesammte Oberfläche des durch diesen Schnitt entstehenden abgestumpften Kegels.

Man berechne:

Kegel für sich. Einfache Anw. der Formeln.

1. M aus R und S. $\alpha)$ $R = 11{,}1$; $S = 22{,}6$; $\beta)$ $R = 7\frac{1}{16}$, $S = 14\frac{30}{71}$.
2. M aus R und H. $R = 0{,}33$; $H = 9{,}64$.
3. M aus S und H. $S = 113$; $H = 112$.
4. O aus R und S. $R = 5{,}8$; $S = 16{,}8$.
5. O aus R und H. $H = 78{,}085$; $R = 7{,}415$.
6. O aus S und H. $S = 26{,}8306$; $H = 26{,}3606$.
7. R aus M und S. $M = 74692$; $S = 317$.
8. S aus M und R. $M = 309{,}6$; $R = 2{,}7$.
9. H aus M und R. $M = 431{,}66$; $R = 6$.
10. R aus M und H. $M = 908{,}56$; $H = 20{,}9$.
11. S aus M und H. $M = 146177$; $H = 240$.
12. R aus O, S. $O = 40999$; $S = 421$.
13. S aus O, R. $O = 209{,}105$; $R = 3{,}2$.

14. H aus O, R. $O = 10{,}8874$; $R = 0{,}96$.
15. H aus O, S. $O = 22{,}1673$; $S = 2{,}81$.
16. R aus O, H. $O = 200$, $H = 22{,}828$.
17. S aus O, H. $O = 9692{,}3$; $H = 29{,}7$.
18. R, S und H aus O und M. $O = 100{,}4$; $M = 55{,}034$.

Anwendung eines Schnittkreises.

19. M aus H, h, s. $H = 33{,}39$; $h = 10{,}18$; $s = 10{,}87$.
20. M aus R, r, s. $R = 6$; $r = 1{,}5$; $s = 23{,}873$.
21. M aus R, s, h. $R = 7{,}5$; $s = 27{,}224$; $h = 26{,}5544$.
22. M aus R, r, h. $R = 1{,}2$; $r = 0{,}2$; $h = 92{,}837$.
23. M aus H, h, r. $H = 112{,}982$; $h = 84{,}736$; $r = 0{,}5$.
24. M aus r, s, h. $r = 3$; $s = 9{,}431$; $h = 7{,}27667$.
25. M aus S, s, r. $S = 15$; $s = 10$; $r = 4{,}3503$.
26. M aus S, s, h. $S = 15$; $s = 12$; $h = 10{,}8336$.
27. H aus M, h, s. $M = 105{,}69$; $h = 8{,}74$; $s = 8{,}90$.
28. h aus H, M, s. $M = 385{,}925$; $H = 17$; $s = 9{,}14$.
29. s aus M, H, h. $M = 341161$; $H = 301{,}6$; $h = 226{,}2$.
30. s aus M, R, r. $M = 5894710$; $R = 1346$; $r = 336{,}5$.
31. r aus R, M, s. $M = 268{,}22$; $R = 9{,}24$; $s = 0{,}891$.
32. R aus M, r, s. $M = 4190{,}09$; $r = 8{,}8$; $s = 24{,}25$.
33. R aus M, s, h. $M = 998620$; $s = 986$; $h = 950$.
34. s aus M, h, R. $M = 351792$; $h = 417\frac{3}{11}$; $R = 220$.
35. h aus M, R, s. $M = 2051333$; $R = 616$; $s = 795$.
36. h aus M, R, r. $M = 502611$; $R = 396$; $r = 79{,}2$.
37. r aus M, R, h. $M = 187750$; $R = 228{,}8$; $h = 63$.
38. h aus M, H, r. $M = 7156{,}17$; $H = 28{,}49$; $r = 31{,}2$.
39. r aus M, H, h. $M = 90{,}9$; $H = 4{,}29$; $h = 0{,}39$.
40. r aus M, s, h. $M = 199736$; $s = 84{,}5$; $h = 12{,}3$.
41. h aus M, r, s. $M = 15248$; $r = 36{,}8$; $s = 10{,}9$.
42. r aus M, S, s. $M = 177{,}844$; $S = 18{,}87$; $s = 12{,}58$.
43. s aus M, S, r. $M = 644{,}4$; $S = 25{,}64$; $r = 2$.
44. S aus M, r, s. $M = 140{,}168$; $r = 3$; $s = 3{,}305$.
45. S aus M, s, h. $M = 541{,}128$; $s = 10{,}335$; $h = 8{,}415$.
46. h aus M, S, s. $M = 1775{,}71$; $S = 26{,}915$; $s = 19{,}225$.
47. s aus M, S, h. $M = 722{,}183$; $S = 16{,}42$; $h = 4{,}29$.
48. O_1 aus S, s, r. $S = 12{,}3034$; $s = 10{,}9018$; $r = 0{,}89998$.
49. O_1 aus r, s, h. $r = 0{,}3$; $s = 19{,}0027$; $h = 17{,}3716$.
50. O_1 aus R, s, h. $R = 138{,}53$; $s = 130{,}25$; $h = 69{,}75$.
51. O_1 aus R, r, S. $R = 3{,}5$; $r = 1{,}2$; $S = 201{,}686$.
52. O_1 aus H, h, r. $H = 176{,}056$; $h = 71{,}7267$; $r = 1{,}6$.

53. r aus O_1, S, s. $O_1 = 3{,}55$; $S = 4{,}732$; $s = 0{,}52965$.
54. S aus O_1, r, s. $O_1 = 127{,}8$; $r = 2{,}67652$; $s = 2{,}6$.
55. s aus O_1, r, S. $O_1 = 25{,}1327$; $r = 1$; $S = 2$. (Cub. Gl.)
56. r aus O_1, s, h. $O_1 = 14{,}2$; $s = 1{,}03802$; $h = 0{,}5172$.
57. h aus O_1, s, r. $O_1 = 1330{,}88$; $s = 13{,}83$; $r = 2{,}5$.
58. R aus O_1, s, h. $O_1 = 88{,}75$; $s = 2{,}61341$; $h = 2{,}52209$.
59. h aus O_1, R, s. $O_1 = 102{,}614$; $R = 4{,}04$; $s = 3{,}044$.
60. S aus O_1, R, r. $O_1 = 124{,}22$; $R = 4{,}1$; $r = 3{,}3$.
61. r aus O_1, R, S. $O_1 = 31{,}95$; $R = 1{,}78907$; $S = 7{,}22317$.
62. R aus O_1, S, r. $O_1 = 56{,}8$; $S = 3{,}03$; $r = 1$. (Cub. Gl.)
63. O_1 aus O, R, r. $O = 109{,}051$; $R = 5{,}65$; $r = 3{,}39$.
64. O_1 aus O, R, s. $O = 39638{,}2$; $R = 79{,}1$; $s = 34{,}46$.
65. O_1 aus O, r, s. $O = 44{,}459$; $r = 0{,}791$; $s = 3{,}7683$. (Cubisch.)

Zusammengesetzte Aufgaben.

66. Lehrsatz: Der Mantel eines geraden Kegels ist stets grösser als seine Grundfläche.

67. Der Mantel eines geraden Kegels soll durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt halbirt werden. In welcher Entfernung von der Spitze ist der Schnitt zu legen?

68. Die Oberfläche eines geraden Kegels sei gleich a, die Seitenlinie desselben sei um b grösser als der Durchmesser der Grundfläche. Wie gross sind beide? $a = 188{,}496$ □ cm; $b = 7$ cm.

69. Die Mantelfläche eines geraden Kegels zu berechnen, wenn der Axenschnitt desselben ein rechtwinkeliges Dreieck und der Umfang der Grundfläche gleich p ist.

70. Von einem geraden Kegel ist der Unterschied zwischen dem Mantel und der Grundfläche gleich d und die Summe des Radius und der Seitenlinie gleich s gegeben; man berechne diese Linien. $d = 100{,}531$ □ cm, $s = 20$ cm.

71. Unter welcher Bedingung sind die Mäntel eines geraden Cylinders und eines geraden Kegels von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen inhaltsgleich?

72. Jeder Axenschnitt eines Kegels sei ein gleichseitiges Dreieck, seine Höhe gleich h. Man soll die Oberfläche des Kegels berechnen. $h = 8{,}1172$.

73. In welchem Verhältniss steht bei einem gleichseitigen Kegel der Mantel zur Grundfläche?

74. Den Mantel eines Kegels zu berechnen, der einer gegebenen geraden, quadratischen Pyramide umbeschrieben ist, wenn

die Grundkante a und die Höhe h der letzteren gegeben sind. $a = 23$; $h = 10{,}8885$.

75. Die Spitze eines Kegels liege in dem Mittelpunkt der oberen Grundfläche eines geraden, regelmässig-achtseitigen Prismas, die Grundfläche des Kegels sei der unteren Grundfläche des Prismas einbeschrieben. Wie gross ist die Oberfläche des Kegels? Gegeben, wie vorher, a und h.

76. Um eine Kugel, deren Durchmesser gleich d ist, sei ein gerader Kegel beschrieben, die Höhe desselben sei gleich h. Wie gross ist die Gesammt-Oberfläche dieses Kegels? $d = 2^m{,}17$; $h = 8^m{,}08$.

Cylinder mit Kegelmantel.

77. Wie verhält sich der Mantel eines geraden Cylinders zu dem eines Kegels, welcher auf derselben Grundfläche steht, und dessen Spitze im Mittelpunkt der oberen Grundfläche des Cylinders liegt? Man berechne ausserdem die Oberfläche des durch Herausschneiden des Kegels aus dem Cylinder entstehenden Körpers.

78. Ein gerader Cylindermantel, dessen Höhe gleich h und dessen Radius gleich r gegeben ist, sei an seinen Grundflächen durch zwei auf diesen stehende Kegelmäntel, deren Höhen den Radien gleich sind, geschlossen. Wie gross ist die Oberfläche des so entstandenen Körpers? $h = 44{,}40579$; $r = 1{,}7$.

79. Die Höhe eines Kegels zu construiren, dessen Oberfläche gleich dem Mantel eines Cylinders von halb so grosser Höhe und viermal so grosser Grundfläche sei, wenn der Radius r des Kegels gegeben ist.

80. In einen gegebenen geraden Kegel einen geraden Cylinder zu construiren, dessen Mantel gleich dem dritten Theile des Kegelmantels ist.

Oberfläche des Prismas und des Kegels.

81. Ueber einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a soll ein gerades Prisma, und über dem um das Dreieck beschriebenen Kreise soll ein gerader Kegel von gleicher Höhe so construirt werden, dass die Summe der Seitenflächen des Prismas $n$mal so gross wird, als die Mantelfläche des Kegels. Man berechne die Höhe. $n = \frac{1}{2}$, $a = 100$.

Kegelstumpf.

82. Den Mantel eines geraden Kegelstumpfes zu berechnen aus den Radien der Grundflächen, $R = 17^{cm}$, $r = 3^{cm}$, und dem Neigungswinkel einer Seitenlinie gegen die eine Grundfläche, gleich 45^0.

83. Der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels sei

gleich r Meter, seine Höhe gleich h Meter. In welcher Entfernung von der Spitze wird man denselben durch eine der Grundfläche parallele Ebene durchschneiden müssen, wenn der Mantel des abgeschnittenen Kegels um a Quadratmeter kleiner sein soll, als der Mantel des übrig bleibenden Stumpfes? $r = 54{,}6$; $h = 61$; $a = 5231{,}7$.

84. In einem geraden abgestumpften Kegel sei der Durchmesser der oberen Grundfläche den Seitenlinien gleich. Den Mantel desselben aus dem Umfang u eines Axenschnitts und der Höhe h zu berechnen. $u = 146{,}9$; $h = 22{,}6$.

85. Wie gross ist die Höhe eines abgestumpften geraden Kegels, dessen Mantel gleich M ist, und dessen Endflächen bezüglich die Flächeninhalte a und b haben? $M = 172{,}787\,\square^{cm}$; $a = 50{,}265\,\square^{cm}$; $b = 153{,}938\,\square^{cm}$.

86. Um einen geraden Cylinder ist ein abgestumpfter Kegel beschrieben, so dass die oberen Grundflächen beider Körper zusammenfallen und die untere des Kegels der unteren des Cylinders concentrisch ist und sich dem Flächeninhalte nach zu derselben wie $m : n$ verhält; der Radius r und die Höhe h des Cylinders sind gegeben. Man berechne **a**) die Oberfläche des abgestumpften Kegels, **b**) die Oberfläche des durch Herausschneiden des Cylinders aus dem Kegelstumpf entstehenden Körpers. $m : n = 9 : 4$; $r = 6{,}02$; $h = 9$.

87. Parallel zu einer Grundfläche hat man in einem abgestumpften geraden Kegel, dessen Höhe gleich h ist, und dessen Grundflächen die Radien R und r haben, einen Schnitt gelegt, dessen Fläche das arithmetische Mittel zwischen den beiden Grundflächen ist. Wie gross sind die Mäntel der beiden Theile? $h = 35$; $R = 14{,}603$; $r = 2{,}603$.

88. Von einem abgestumpften geraden Kegel seien die Peripherien p, P der Endflächen und die Seitenlinie s gegeben; man soll seinen Mantel berechnen. $P = 25$, $p = 17$, $s = 12$.

89. Den Mantel eines abgestumpften geraden Kegels zu berechnen, dessen Axenschnitt den Inhalt F hat, und dessen Seitenlinie doppelt so lang als die Höhe ist.

90. † Von einem geraden abgestumpften Kegel, dessen Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Radien ist, kennt man die Summe s der Radien und den Neigungs-

winkel α einer Seitenlinie gegen die untere Grundfläche. Man berechne seinen Mantel.

Doppelkegel.

91. Die Oberfläche des durch Rotation eines Quadrats um eine Diagonale entstehenden Doppelkegels aus der Seite a des Quadrats zu berechnen. $a = 4{,}74425$.

92. Desgleichen für eine Umdrehungsaxe, die parallel zu einer Diagonale durch einen Eckpunkt des Quadrats geht, die Oberfläche des Rotationskörpers zu bestimmen. $a = 1{,}06083$.

93. †Der Mantel eines geraden Kegels sei gleich 81,311 □^{cm}, die Seitenlinie gleich 10^{cm}. Wie gross ist der Winkel an der Spitze eines Axenschnitts?

Aehnliche Aufgaben s. §. 30.

§. 18. Die Oberfläche der Kugel und ihrer Theile.

Kugel für sich.

1. Die Oberfläche einer Kugel zu berechnen, wenn der Radius derselben gleich α) 12,6156; β) $19\frac{125}{132}$; γ) $14\frac{137}{1306}$; δ) 16,449 ist.

2. Aus der Oberfläche O einer Kugel den Radius derselben zu berechnen. $O = \alpha$) 50,265; β) 254,47.

3. Wie gross ist die Oberfläche einer Kugel, wenn ein Schnittkreis derselben, dessen Abstand vom Mittelpunkt gleich p ist, den Umfang u hat? $p = 10$, $u = 22{,}0895$.

4. Wie gross ist die Oberfläche der Erdkugel in geographischen Quadratmeilen, wenn der Umfang derselben 5400 solche Meilen beträgt; wie gross in neuen Quadratmeilen, wenn der Erddurchmesser gleich 1700 Meilen gesetzt wird?

5. Was kostet die Vergoldung einer Kugel von 22,6^{cm} Radius, wenn 100 □^{cm} 87,5 Pf. kosten?

6. Wie gross ist der Radius einer Kugel, deren Oberfläche gleich der Summe der Oberflächen von vier anderen Kugeln ist, wenn die Radien der letzteren bezüglich gleich r_1, r_2, r_3, r_4 gegeben sind? $r_1 = 336$, $r_2 = 252$, $r_3 = 21$, $r_4 = 20$.

Kugel mit reg. Polyedern.

7. In einen Kreis sei ein regelmässiges Sechseck, in das Sechseck ein neuer Kreis und in diesen wieder ein regelmässiges Sechseck beschrieben, u. s. f. ohne Ende. Die ganze Figur wird um einen Durchmesser des ersten Kreises als Axe gedreht. Wie gross ist die Summe der Oberflächen aller dadurch erzeugten Kugeln?

8. Wie gross ist die Oberfläche einer Kugel, deren Radius

gleich der Kante eines regelmässigen Ikosaëders ist, dessen Oberfläche den Inhalt a^2 hat? $a^2 = 1684$.

9. Die Oberfläche einer Kugel zu berechnen, welche einem Würfel, dessen Kante gleich a ist, einbeschrieben ist. $a = 0{,}797883$.

10. Desgleichen einer solchen, welche diesem Würfel umbeschrieben ist. $a = 10{,}8034$.

11. Die Oberfläche eines regelmässigen Tetraëders sei gleich A. Wie gross ist die Oberfläche der demselben umbeschriebenen Kugel? $A = 52{,}1925$.

12. Wie verhalten sich die Oberflächen der drei Kugeln zu einander, von denen die erste die Seitenflächen eines regelmässigen Tetraëders berührt, die zweite durch die Halbirungspunkte seiner Kanten und die dritte durch die Eckpunkte desselben geht?

13. Dieselbe Aufgabe für α) ein regelmässiges Oktaëder, β) einen Würfel.

14. In welchem Abstand von einem Eckpunkt eines regelmässigen Oktaëders muss man durch dasselbe einen zu der zugehörigen Diagonalaxe senkrechten ebenen Schnitt legen, damit die Oberfläche der in die abgeschnittene Pyramide beschriebenen Berührungskugel den $n$ten Theil der Oberfläche derjenigen zweiten Kugel betrage, welche die Schnittebene und die vier nicht geschnittenen Oktaëderflächen berührt? $n = 2$.

Mit Kegel, Cylinder, Rotationskörper.

15. Eine Kugel sei einem geraden Kegel einbeschrieben. Es soll ihre Oberfläche aus dem Radius r der Grundfläche und der Höhe h des letzteren berechnet werden. $r = 3{,}69$, $h = 8$.

16. Auf den beiden Grundflächen eines geraden Cylinders liegen Halbkugeln, welche diese Grundflächen zu grössten Kreisen haben, beide ausserhalb des Cylinders. Man soll die Oberfläche des ganzen Körpers aus der Diagonale d und dem Umfang u des Axenschnitts des Cylinders berechnen. $d = 23{,}59$; $u = 64{,}82$.

17. Wie verhält sich der Mantel eines durch Rotation eines gleichseitigen Dreiecks um eine seiner Höhen beschriebenen Kegels zu dem Mantel der Kugel, welche bei dieser Drehung durch den dem Dreieck einbeschriebenen Kreis entsteht?

18. Der Halbmesser einer gegebenen Kugel sei gleich r; ein gerader Kegel habe zur Höhe den Durchmesser der Kugel, und seine ganze Oberfläche sei gleich der Oberfläche der Kugel. Wie verhält sich a) der Halbmesser der Kegelbasis zum Kugel-

halbmesser, b) die Grundfläche des Kegels zu seiner krummen Seitenfläche und zu seiner ganzen Oberfläche?

19. Die Oberfläche des durch Drehung eines regelmässigen Sechsecks um einen seiner grossen Durchmesser entstehenden Körpers aus der Oberfläche der dem letzteren einbeschriebenen Kugel zu berechnen. $O = 11\sqrt{3}$.

20. Ein regelmässiges Achteck rotire um einen seiner grossen, und ein ihm congruentes Achteck um einen seiner kleinen Durchmesser. Wie verhalten sich die Oberflächen der beiden Rotationskörper zu einander?

21. Die Oberfläche der in einen geraden Kegel einbeschreibbaren Kugel betrage $\frac{2}{3}$ des Inhalts der Mantelfläche des Kegels; der Radius des letzteren sei gleich ϱ gegeben. Man berechne den Radius der Kugel.

22. Zu beweisen: Der Inhalt der krummen Oberfläche eines Kugelsegments (einer Calotte) ist gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Halbmesser gleich einer Sehne ist, die einen Pol des begrenzenden Schnittkreises der Kugel mit einem Punkte seiner Peripherie verbindet.

Kugelsegment.

23. Den Inhalt M der krummen Oberfläche eines Kugelsegments aus der Höhe h desselben und dem Abstand p seiner Grundfläche vom Mittelpunkt der Kugel zu berechnen. $\alpha)$ $h = 4{,}681$, $p = 2{,}119$; $\beta)$ $h = 2$, $p = 23{,}873$.

24. Ebenso M aus p und dem Kugelradius r. $\alpha)$ $p = 14{,}0672$; $r = 17{,}67$; $\beta)$ $p = 18{,}41$, $r = 23{,}21$.

25. Ebenso M aus p und dem Radius ϱ der Grundfläche. $\alpha)$ $p = 42{,}4032$, $\varrho = 3{,}985$; $\beta)$ $p = 19{,}873$, $\varrho = 13{,}2282$.

26. Ebenso M aus h und der Oberfläche O der Kugel. $h = 4$, $O = 16114$.

27. Wie hoch müsste man sich über die Oberfläche der Erde erheben, um einen Theil derselben vom gegebenen Flächeninhalt F übersehen zu können? $r = 859{,}44$ geogr. Meilen. $\alpha)$ $F = 182200$ □ M. (Europa); $\beta)$ $F = 11500$ □ M.

28. Ein leuchtender Punkt hat die Entfernung a von der Oberfläche einer Kugel, deren Radius gleich r ist. Wie gross ist die beleuchtete Fläche derselben? $a = 7{,}7932$, $r = 2$.

29. Wie weit muss ein leuchtender Punkt von dem Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius r entfernt sein, damit er $\frac{1}{3}$ der Kugel erhelle?

30. Wie hoch ist eine Calotte, deren Inhalt $n$mal so gross ist, als ihre Grundfläche? Gegeben sei der Kugelradius r. $n = 3$, $r = 12$.

31. Eine Calotte, deren Höhe gleich h^m ist, hat b $\square^m$ Fläche. Wie gross ist der Radius der zugehörigen Kugel? $h = 5$, $b = 300$.

32. Die krumme Oberfläche eines Kugelsegments von der Höhe h verhalte sich zur ebenen Grundfläche desselben wie $m : n$. Wie gross ist der Kugelradius?

33. In einem Kugelsegment verhalte sich der Radius des Grundkreises zum Kugelradius wie $p : q$. In welchem Verhältniss steht die krumme Oberfläche desselben zu dem Mantel des in das Kugelsegment einbeschriebenen geraden Kegels? $p : q = 7 : 25$.

34. Ueber einem Schnittkreis einer Kugel als Grundfläche sei ein Kegel beschrieben, dessen Seitenlinien die Kugel berühren. In welchem Verhältniss muss die Ebene jenes Kreises den zu ihr senkrechten Durchmesser der Kugel theilen, damit der Mantel des Kegels zu der innerhalb desselben liegenden Calotte in einem gegebenen Verhältniss $m : n$ stehe?

35. Wie hoch ist das Kugelsegment, welches mit derjenigen Kugel, deren Radius dieser Höhe gleich ist, gleiche Gesammt-Oberfläche hat? ($r = 1$.)

36. Von einer Kugel mit dem Radius r ist durch eine Ebene ein Stück abgeschnitten, dessen gesammte Oberfläche $\frac{2}{3}$ der Kugelfläche beträgt. Welches Stück schneidet diese Ebene von dem zu ihr senkrechten Durchmesser ab?

37. Ein leuchtender Punkt habe eine solche Lage zu zwei Kugeln mit den Mittelpunkten A und B und bezüglich den Radien r und R, dass die zweite von dem Schattenkegel der ersten gerade umhüllt wird. Wie gross ist die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkt der ersten Kugel, und wie gross ist das Stück, welches auf der ersten Kugel beleuchtet ist? AB sei gleich a gegeben. $a = 13$, $r = 2$, $R = 7$.

38. Den Mantel einer Kugelzone aus den Radien ihrer Grundkreise und dem Kugelradius zu berechnen. $r_1 = 33$, $r_2 = 25$, $R = 65$. Zone.

39. Wieviel Quadratmeilen betragen die Flächeninhalte der einzelnen Zonen der Erde, wenn man diese als vollkommene

Kugel betrachtet? $r = 859{,}44$ M., Schiefe der Ekliptik $e = 23^0\ 17'\ 30''$.

40. Durch eine Halbkugel soll ein der Grundfläche paralleler ebener Schnitt gelegt werden, so dass **a**) durch denselben die krumme Oberfläche der Halbkugel halbirt werde, oder dass **b**) die beiden Theile gleiche Gesammt-Oberflächen haben.

41. Eine Halbkugel und ein gerader Kegel haben denselben Kreis zur Grundfläche, und die Höhe des Kegels sei doppelt so gross, als der Radius der Halbkugel. In welchem Verhältniss wird die krumme Oberfläche der letzteren durch die Kegelfläche getheilt?

42. Um einen geraden Cylinder von 36 cm Höhe, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 15 cm hat, ist eine Kugel beschrieben. Wie verhält sich der Cylindermantel zu der ihn umgebenden Kugelzone?

43. † Es seien die Winkel α_1, α_2 gegeben, welche die nach den Umfängen zweier einander parallelen Schnittkreise der Kugel gehenden Radien mit dem auf den Ebenen dieser Kreise senkrechten Radius bilden. Wie verhält sich der Flächeninhalt der durch die beiden Schnitte bestimmten Zone zu dem Mantel des durch dieselben Schnittkreise als Grundflächen bestimmten abgestumpften Kegels? (Zwei Fälle!)

44. Eine Kegelfläche berühre eine Kugel und sei durch die Ebene des Berührungskreises und eine dieser parallele, zwischen ihr und dem Kugelmittelpunkt liegende Ebene geschnitten. Man bestimme das Verhältniss des Mantels des so begrenzten abgestumpften Kegels zu dem Inhalt der zwischen denselben Ebenen liegenden Kugelzone, wenn der Kugelradius und die Abstände der beiden Ebenen vom Mittelpunkt gegeben sind.

Sphärische Figuren.

45. Den Flächeninhalt eines Kugelzweiecks aus dem Radius r zu berechnen, wenn sein Centriwinkel gleich 36^0 ist. $r = 1{,}26156$.

46. Den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks aus dem Radius r und den Winkeln α, β, γ zu berechnen für **a**) $\alpha = 20^0\,9'\,30''$, $\beta = 55^0\,53'\,32''$, $\gamma = 114^0\,20'\,14''$; **b**) $\alpha = 73^0\,12'\,8''$, $\beta = 85^0\,3'\,14''$, $\gamma = 32^0\,9'\,16''$; **c**) $\alpha = 114^0\,20'\,5''{,}92$, $\beta = 30^0\,57'\,18''{,}41$, $\gamma = 90^0\,9'\,41''{,}67$. ($r = 1$.)

47. Durch directe Messung der Winkel des sphärischen Dreiecks Brocken-Hohehagen-Inselsberg ergab sich der sphärische Excess desselben $e = 14''{,}853$. Man berechne den Flächeninhalt

dieses Dreiecks für den Erddurchmesser gleich 1716,96 Meilen. (Resultat: 53,070 Quadratmeilen.)

48. Den Flächeninhalt eines sphärischen Polygons aus seinem sphärischen Excess e und der Oberfläche der Kugel zu berechnen.

49. Den sphärischen Excess eines Dreiecks aus seinem Flächeninhalt F und dem Radius r der Kugel zu berechnen. $F = 10\frac{3}{4}$ Quadratmeilen, $r = 858{,}48$ Meilen.

50. Wie gross ist der Centriwinkel eines sphärischen Zweiecks, welches mit einem (auf derselben Kugel liegenden) sphärischen Dreieck, dessen Excess gleich e gegeben ist, gleiche Fläche hat?

51. Wie verhalten sich die sphärischen Excesse zweier sphärischen Dreiecke zu einander, welche auf verschiedenen Kugeln liegen und gleichgrosse Flächen haben?

52. Wenn zwei sphärische Vielecke gleiche Winkelsummen haben, so sind ihre Flächeninhalte gleich oder unterscheiden sich um eine ganze Anzahl von Viertel-Kugelflächen.

53. Aus dem Flächeninhalt F eines sphärischen Dreiecks, dessen Winkel gegeben sind, die Oberfläche der Kugel zu berechnen. $F = 3962$ □^{m}, $\alpha = 91^0\ 12'\ 17''$, $\beta = 120^0\ 9'\ 41''$, $\gamma = 100^0\ 42'\ 2''$.

54. † Um die Spitze einer regelmässig-dreiseitigen Pyramide als Mittelpunkt ist eine Kugel mit dem Radius $r = 25^{cm}$ beschrieben; wieviele Quadratcentimeter ist das Stück der Kugeloberfläche gross, das zwischen den Seitenflächen der Pyramide liegt, wenn die Höhe der letzteren $h = 53^{cm}$, die Seite ihrer Basis $a = 47^{cm}$ lang ist?

55. † Wie gross ist derjenige Theil der als vollkommene Kugelfläche betrachteten Oberfläche der Erde, welcher zwischen den Breitengraden von $57^0\ 51'\ 41''$ und $49^0\ 16'\ 52''$ nördlich und zwischen den Meridianen von $97^0\ 20'$ und $100^0\ 7'\ 40''$ liegt? $r = 859{,}5$ Ml.

56. Sphärische Dreiecke, die über derselben Grundlinie stehen, sind gleich, wenn ihre Spitzen in einem Schnittkreise der Kugel liegen, welcher durch die Gegenpunkte der Endpunkte der Grundlinie geht. Man beweise diesen Lehrsatz und bilde Aufgaben über Verwandlung sphärischer Dreiecke in inhaltsgleiche durch Construction, analog entsprechenden Aufgaben über ebene Dreiecke.

57. In welchem Verhältniss theilt eine erweiterte Grenz-

fläche eines regelmässigen Ikosaëders die Oberfläche der ihm umbeschriebenen Kugel?

58. † Welcher Centriwinkel gehört zu einem Kugelabschnitt, dessen Gesammt-Oberfläche gleich dem grössten Kugelkreise ist?

59. † Wie gross ist der Centriwinkel im Axenschnitt eines Kugelsectors, wenn die konische Oberfläche desselben gleich der sphärischen ist?

60. Aus der Gesammt-Oberfläche eines Kugelausschnitts mit dem Winkel 2α an der Spitze die Oberfläche der Kugel zu berechnen.

61. Aus einem geraden Cylinder, dessen Höhe $1\frac{1}{2}$mal so gross als der Radius der Grundfläche ist, seien zwei Kegel so herausgeschnitten, dass ihre Spitzen auf dem Halbirungspunkt der Axe des Cylinders liegen und ihre Grundflächen bezüglich mit denen des Cylinders zusammenfallen. Man berechne aus dem Radius des Cylinders den Radius einer Kugel, welche mit dem entstandenen Körper gleiche Oberfläche hat. $r = \sqrt{22}$.

62. Ueber einem Quadrat, dessen Seite gleich a ist, sei eine Pyramide, welche als Hälfte eines regelmässigen Oktaëders betrachtet werden kann, sowie ein gerades Prisma beschrieben, in dessen oberer Grundfläche die Spitze der Pyramide liegt. Es seien ferner über dem Kreise, welcher dem Quadrat umbeschrieben ist, folgende Körper construirt: **a**) ein Kegel, dessen Spitze die Spitze der Pyramide ist, **b**) ein Cylinder, dessen obere Grundfläche der oberen des Prismas umbeschrieben ist, **c**) ein abgestumpfter Kegel, dessen obere Grundfläche der oberen des Prismas einbeschrieben ist, **d**) eine Halbkugel. Wie verhalten sich die Gesammt-Oberflächen aller in dieser Aufgabe genannten Körper zu einander?

63. Die krumme Oberfläche eines Kugelsegments sei $n$mal so gross, als der Mantel des demselben einbeschriebenen geraden Kegels. Wie verhält sich die Höhe des Segments zum Durchmesser der Kugel?

64. In einem abgestumpften geraden Kegel liegt eine Kugel, deren Durchmesser gleich der Höhe des Kegelstumpfes ist, und welche innerhalb des letzteren, die krumme Seitenwand berührend, herumrollen kann. Wie gross ist der bei dieser Bewegung von dem vertikalen Durchmesser der Kugel, welcher bei dem Rollen derselben als Drehungsaxe diene, beschriebene Cylindermantel,

und wie verhält sich derselbe zur Oberfläche der Kugel, wenn die Seitenlinie s des Kegelstumpfs nebst den Radien R, r seiner Grundflächen gegeben ist?

65. Die Seitenlinie eines abgestumpften geraden Kegels sei gleich s, seine Höhe gleich h gegeben, und sein Mantel sei gleich der Summe seiner Grundflächen. Wie gross ist die Oberfläche einer Kugel, von welcher die Grundflächen Schnittkreise sind? $s = 37$, $h = 12$.

66. † Wie gross ist in einem geraden abgestumpften Kegel, dessen untere Grundfläche zweimal, und dessen Mantelfläche dreimal so gross als die obere Grundfläche ist, der Neigungswinkel der Seitenlinien gegen die Grundfläche, und wie gross ist der Radius einer Kugel, deren Oberfläche gleich der gesammten Oberfläche dieses Kegelstumpfs ist?

VI. Capitel. Berechnung der Volumina.

§. 19. Das Prisma.

Rechtwinkeliges Parallelepiped. Einfache Aufg.

1. Den Kubikinhalt eines Würfels zu berechnen, dessen Kante a) 4, b) 9, c) 25^m, d) 2,4, e) $0{,}03^{cm}$ lang ist.

2. Man berechne das Volumen eines rechtwinkeligen Parallelepipedon, dessen Kanten bezüglich gleich a, b, c sind, für $\alpha)$ $a = 2\frac{1}{3}$, $b = \frac{9}{14}$, $c = 2{,}4$; $\beta)$ $a = 1{,}66667$, $b = 1{,}4$, $c = 0{,}42857$.

3. Wieviel Kubikmeter Sauerstoff enthält die Luft eines rechteckigen Zimmers von 9 Meter Länge, $6\frac{2}{3}$ Meter Breite und $4\frac{1}{2}$ Meter Höhe, wenn in 100 Theilen Luft 21 Theile Sauerstoff enthalten sind?

4. Jemand will eine Mauer von a^m Länge, b^m Breite und c^m Höhe aufführen lassen; wieviel Ziegelsteine hat er dazu nöthig, wenn jeder derselben $a_1{}^m$ lang, $b_1{}^m$ breit und $c_1{}^m$ dick ist? $a = 12$, $b = 0{,}3$, $c = 2{,}1$, $a_1 = 0{,}3$, $b_1 = 0{,}15$, $c_1 = 0{,}07$.

5. Wieviel wiegt ein $0{,}7^m$ langer, $0{,}3^m$ breiter und $0{,}4^m$ dicker Sandsteinblock, wenn ein Kubikdecimeter Wasser 2 Pfund wiegt, und das specifische Gewicht dieses Sandsteins gleich $2\frac{2}{5}$ ist?

6. Eine Grube hat die Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedons, dessen Grundfläche $1\frac{1}{5}$ Quadratmeter und dessen Tiefe 4,7 Decimeter beträgt. Wieviel Liter Wasser kann dieselbe fassen? (1 Liter = 1 Kubikdecimeter.)

7. Um eine Grube von 9,3 Meter Länge und 4,2 Meter Breite zuzuschütten, wurde ein Schutthaufen von 10,2 Meter Länge, 7 Meter Breite und 0,6 Meter Höhe gebraucht; wie tief war die Grube?

8. Welchen Werth hat eine quadratische Tafel von 0,2 Meter im Quadrat Stärke und 1 Decimeter Dicke, wenn dieselbe a) von Gold, b) von Silber ist? Specifisches Gewicht des Goldes 19,325, des Silbers 10,474, 1 gr. Gold = 2,79 Mark, 1 gr. Silber = 0,18 Mark.

Zusammengesetzte Aufgaben.

9. Den Kubikinhalt eines Würfels zu berechnen aus a) seiner Oberfläche O, b) seiner Diagonalaxe d, c) dem Umfang U einer Diagonalebene, d) dem Flächeninhalt F einer Diagonalebene. a) $O = 8{,}64$ □, b) $d = 20$, c) $U = 48{,}28427$, d) $F = 0{,}509117$.

10. Der Kubikinhalt eines Würfels sei gleich V; wie gross ist seine Oberfläche? $V = 8$ Kubikmeter.

11. Der Kubikinhalt eines Würfels sei gleich V; wie gross ist seine Diagonalaxe? $V = 192{,}45$.

12. Wie vielmal ist ein Würfel grösser als ein anderer, wenn die Kante des ersten doppelt so gross als die des zweiten ist?

13. Die Kante eines Würfels zu berechnen, welcher gleich der Summe dreier Würfel ist, deren Kanten bezüglich gleich a, b, c sind. $a = 0{,}3$, $b = 0{,}4$, $c = 0{,}5$.

14. Die Volumina zweier Würfel betragen zusammen a Kubikmeter, die Summe ihrer Kantenlängen ist gleich b Meter; wie lang sind ihre Kanten? $a = 13{,}895$, $b = 3{,}5$, oder $a = 407$, $b = 11$.

15. Wie lang sind die Kanten zweier Würfel zu machen, deren Volumina sich wie $a^3 : b^3$ verhalten, und welche zusammen so gross sein sollen als ein Würfel, dessen Oberfläche gleich O ist? $a : b = 5 : 3$, $O = 42{,}722$.

16. Von zwei Würfeln hat der eine um a Meter längere Kanten als der andere, und die Differenz ihrer Volumina ist gleich b Kubikmeter. Wie lang sind die Kanten dieser Würfel? $a = 0{,}3$, $b = 48{,}627$.

17. Aus einem rechtwinkeligen Parallelepipedon, dessen Länge l, Breite b und Höhe h Centimeter beträgt, soll ein Würfel geformt werden; wie lang wird die Kante desselben sein?

18. Die drei Kanten eines rechtwinkeligen Parallelepipedons verhalten sich wie $a : b : c$. Wachsen dieselben bezüglich um d, e, f Centimeter, so wächst der Kubikinhalt des Körpers um g Kubikcentimeter. Man berechne die Kanten. $a : b : c = 2 : 3 : 4$; $d = 4$, $e = 3$, $f = 2$, $g = 2544$.

19. Wenn ein 9 Decimeter tiefer, rechtwinkeliger, parallelepipedischer Behälter 5 Decimeter hoch gefüllt ist, so fasst er dreimal soviel Kubikdecimeter weniger, als wenn er ganz gefüllt ist, wie der Umfang der Grundfläche Decimeter misst. Das Quadrat der Diagonale seiner Grundfläche enthält $3\frac{7}{11}$ mal soviel Quadratdecimeter, als die Diagonalaxe des Parallelepipedon Längen-Decimeter hat. Wie gross sind die Länge und die Breite der Grundfläche des Behälters?

20. Den Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedon zu berechnen, dessen Diagonalebene ein Quadrat mit dem Inhalt f^2 ist, und dessen Grundkanten sich wie $a : b$ verhalten. $f = 37$, $a : b = 5 : 7$.

21. Das Volumen eines rechtwinkeligen Parallelepipedon ist 2080 Kubikdecimeter, seine Oberfläche gleich 996 $\square^{dc}$, und der Umfang seiner Grundfläche gleich 58^{dc}. Wie gross sind seine Länge, Breite und Höhe?

22. Die Oberfläche eines rechtwinkeligen Parallelepipedon beträgt 12 $\square^{m}$, die Länge desselben übertrifft die Summe der Breite und Höhe um $1{,}25^{m}$, und die von einem Eckpunkt zum gegenüberliegenden gezogene Diagonale des Körpers misst $3{,}25^{m}$. Wieviel beträgt das Volumen des Parallelepipedon?

23. In ein gerades rechtwinkeliges Parallelepipedon, dessen Kanten gegeben sind, sei ein zweites construirt, so dass die Eckpunkte seiner Grundflächen die Grundkanten des ersteren halbiren. In das zweite Parallelepipedon sei auf dieselbe Art ein drittes construirt, u. s. f. Man berechne die Summe der Kubikinhalte der unendlich vielen auf diese Art denkbaren Körper.

24. Drei zusammenstossende Kanten eines rechtwinkeligen Parallelepipedon zu construiren, sodass die eine die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden anderen, ihre Summe gleich s und das Volumen des Parallelepipedon gleich c^3 sei.

Prisma.

25. Ein dreiseitiges Prisma ist a^{m} hoch, und seine Grundfläche bildet ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten b^{m} und

c^m lang sind. Wieviel beträgt sein Kubikinhalt? $a = 12\frac{2}{11}$, $b = 2\frac{4}{9}$, $c = 11\frac{1}{4}$.

26. Es soll ein Graben ausgeworfen werden, welcher oben a^m, unten b^m breit und überall c^m lang ist. Seine Tiefe beträgt d^m. Wie theuer ist die Arbeit, wenn jedes Kubikmeter 35 Pf. kostet und bei der Berechnung des Inhalts die Breite als überall gleich dem arithmetischen Mittel der oberen und unteren Breite angenommen wird? $a = 1{,}35$, $b = 0{,}65$, $c = 24$, $d = 1$.

27. Den Kubikinhalt eines geraden, regelmässig-sechsseitigen Prismas aus einer Grundkante a und einer Seitenkante b zu berechnen. $a = 14{,}31$, $b = 2{,}8194$.

28. Desgleichen den Kubikinhalt eines geraden, regelmässig-achtseitigen Prismas. $a = 3{,}4$, $b = 8{,}0262$.

29. In einem geraden, regelmässig-dreiseitigen Prisma seien alle Kanten gleich a; man berechne seinen Kubikinhalt. $a = 13{,}2181$.

30. Wie verhalten sich die Kubikinhalte dreier geraden regelmässigen Prismen von gleichen Höhen zu einander, deren Grundflächen demselben Kreis mit dem Radius r einbeschrieben und bezüglich ein Sechseck, ein Viereck und ein Zehneck sind?

31. Ein aus einem Stoffe, von welchem jeder Kubikcentimeter 0,3 Kilogramm wiegt, verfertigtes Prisma wiegt 175,8 Kilogramm und hat eine Höhe von 3 Decimeter. Wie gross ist seine Grundfläche?

32. Kann man zu dem planimetrischen Satze über die Gleichheit der complementären Parallelogramme einen analogen Satz über Parallelepipeda bilden und beweisen, und wie lautet derselbe?

Prisma mit Cylinder.

33. Ein vierseitiges Prisma, dessen Grundkanten bezüglich gleich a, b, c, d sind, sei einem geraden Cylinder einbeschrieben, dessen Mantelfläche sich zu seiner Grundfläche wie $m : n$ verhält. Man berechne das Volumen des Prismas. $a = 11$, $b = 9$, $c = 7$, $d = 3$, $m : n = \sqrt{13} : \sqrt{10}$.

Mit Kegel.

34. Ein gerades vierseitiges Prisma stehe so in einem geraden Kegel, dass seine untere Grundfläche in der Grundfläche des letzteren liegt und seine obere Grundfläche demjenigen Schnittkreise des Kegels einbeschrieben ist, welcher den Mantel des letzteren im Verhältniss $m : n$ theilt. (Die Theile von der Spitze an gerechnet.) Man berechne das Volumen des Prismas, wenn

seine Grundkanten a, b, c, d und die Höhe h des Kegels gegeben sind. $a = 8$, $b = 6$, $c = 3$, $d = 1$, $m : n = 4 : 5$, $h = 52$.

Mit Kugel.

35. Die Grundflächen eines Prismas, dessen Volumen gleich V gegeben ist, seien zwei Schnittkreisen einer Kugel einbeschriebene Vierecke mit den Seiten a, b, c, d. Man berechne den Radius der Kugel. $V = 240$, $a = 11$, $b = 8$, $c = 4$, $d = 3$.

Mit regelm. Polyedern.

36. Ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Kanten sämmtlich von gleicher Länge sind, steht so in einem regelmässigen Tetraëder, dass seine untere Grundfläche in einer Fläche des Tetraëders liegt und die obere eine Schnittfigur desselben ist. Man berechne das Volumen des Prismas aus der Kante a des Tetraëders. $a = 76\frac{3}{4}$.

37. Die Ecken eines geraden quadratischen Prismas, dessen Seitenkanten doppelt so lang als seine Grundkanten sind, liegen auf den von zwei gegenüberliegenden Eckpunkten eines regelmässigen Oktaëders ausgehenden Kanten desselben. Man berechne das Volumen des Prismas aus der Oberfläche O des Oktaëders. $O = 104{,}355$.

β

38. Man berechne den Kubikinhalt eines dreiseitigen Prismas, dessen Seitenkanten gleich a und gegen die Grundfläche unter dem Winkel φ geneigt sind, wenn die Grundfläche einem Kreis mit dem Radius r einbeschrieben ist und die Winkel α, β hat. $a = 9$, $\varphi = 71^0\,18'\,13''$, $r = 5{,}8$, $\alpha = 52^0\,16'$, $\beta = 87^0\,20'$.

39. Berechne das Volumen eines schiefen Prismas, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, wenn die Seite der Grundfläche $a = 24{,}8$, eine der Seitenkanten $s = 84{,}198$, und die Winkel, welche letztere mit den beiden anliegenden Grundkanten bildet, $\alpha = 72^0\,24'\,32''$, $\beta = 83^0\,35'\,43''$ sind.

40. In einem geraden Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenkeliges Dreieck ist, habe man durch die ungleiche Seite der Grundfläche einen ebenen Schnitt nach der gegenüberliegenden Ecke gelegt. Man soll das Volumen des Prismas aus dem Umfang u der Grundfläche, dem Winkel α an der Basis der letzteren und dem Winkel β an der Basis der Schnittfläche berechnen. $u = 110$, $\alpha = 61^0\,55'\,39''$, $\beta = 75^0\,45'\,0''$.

41. Durch eine Kante in der Grundfläche eines Würfels ist eine Ebene gelegt, welche gegen die Grundfläche unter einem Winkel von $\alpha = 40^0$ geneigt ist. Wieviel betragen die Volumina der beiden hierdurch entstandenen Theile des Würfels, wenn der Flächeninhalt der Schnittfigur $F = 76{,}603$ ist?

42. Den Inhalt eines Parallelepipedon aus drei zusammenstossenden Kanten und den von diesen gebildeten ebenen Winkeln zu berechnen.

43. Den Inhalt eines Parallelepipedon aus drei zusammenstossenden Kanten und den Neigungswinkeln der Flächen an diesen Kanten zu berechnen.

44. In einem Rhomboëder verhalte sich die kürzere Diagonale einer Seitenfläche zu der längeren wie 1 : 2; man berechne das Volumen desselben aus der Kante a.

45. Das Volumen eines Rhomboëders aus dem Flächeninhalt f und der kürzeren Diagonale d einer Grenzfläche zu berechnen.

46. In einem geraden Parallelepipedon, dessen Volumen gleich 2694,4 ist, seien zwei ebene Schnitte durch je zwei einander gegenüberliegende Seitenkanten gelegt. Der Flächeninhalt der einen Schnittfigur sei gleich 757, der Flächeninhalt der anderen gleich 513,22. Die Höhe des Körpers sei gleich der Summe der Diagonalen der Grundfläche. Man berechne den Neigungswinkel der beiden Schnittflächen gegen einander.

47. Den Kubikinhalt eines vierseitigen Prismas aus den Grundkanten a, b, c, d, dem von den Seiten a, b eingeschlossenen Winkel α der Grundfläche, der Seitenkante s und dem Neigungswinkel φ der letzteren gegen die Grundfläche zu berechnen. $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 7$, $s = 39$, $\alpha = 50^0\ 28'\ 43'',7$, $\varphi = 20^0\ 21'\ 1'',94$.

§. 20. Die Pyramide.

Einfache Aufg. α

1. Den Kubikinhalt einer Pyramide zu berechnen, deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a, b, und deren Höhe gleich h ist. α) $a = 15$, $b = 21$, $h = 12$; β) $a = 0{,}13$, $b = 1{,}46$, $h = 5{,}82$; γ) $a = 3\frac{3}{4}$, $b = 7\frac{1}{5}$, $h = 2\frac{5}{6}$.

2. Ebenso, wenn die Grundfläche ein Quadrat mit dem Inhalt F ist, und alle Seitenkanten gleich a sind. α) $F = 288\ \square^{cm}$, $a = 13^{cm}$; β) $F = 21{,}78$, $a = 6{,}5$; γ) $F = 19{,}19$, $a = 16{,}72161$; δ) $a = \sqrt{\frac{3}{4}F}$.

3. Die Pyramide zu Memphis hat eine Höhe von 73 Toisen; die Grundfläche ist ein Quadrat, dessen Seite 116 Toisen lang ist. Wie viel Kubikmeter Inhalt hat diese Pyramide? 1 Toise = $1{,}95^m$.

4. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten a, b; die durch den Scheitel seines rechten Winkels gehende Seitenkante stehe senkrecht zur Grundfläche, die durch den anderen Endpunkt der Kathete a gehende Seitenkante sei gleich c. Wieviel Kubikinhalt hat die Pyramide? $a = 3{,}85$, $b = 2{,}50$, $c = 15{,}37$.

5. Ein Goldschmied giesst eine dreiseitige Pyramide aus Gold von dem specifischen Gewicht 19,325 und dem Werthe von 900 Thlr. für das Kilogramm. Die Höhe der Pyramide ist gleich 4^{cm}, die Höhe ihrer Grundfläche gleich $0{,}4^{cm}$, und die Grundlinie der letzteren gleich $1{,}5^{cm}$. Wieviel ist die Pyramide werth?

6. Das Volumen einer Pyramide zu berechnen, wenn die Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und die Höhe gleich h ist. $a = 0{,}375$, $b = 0{,}5$, $c = 0{,}625$, $h = 0{,}6$.

7. Ebenso, wenn die Grundfläche ein regelmässiges Sechseck mit der Seite a ist, und alle Seitenkanten gleich b sind. $\alpha)$ $b = 76$, $a = 22$; $\beta)$ $b = 129$, $a = 33$; $\gamma)$ $b = 2{,}2$, $a = 1{,}1$.

Zusammengesetzte Aufgaben.

8. Ebenso, wenn die Grundfläche ein Quadrat mit der Seite a und der Flächeninhalt eines durch die Spitze und eine Diagonale der Grundfläche gelegten, zu letzterer senkrechten Schnittes gleich F ist. $a = 3{,}5355$, $F = 600$.

9. Den Kubikinhalt einer geraden, regelmässig-dreiseitigen Pyramide zu berechnen, wenn jede Seitenfläche derselben viermal so gross als die Grundfläche, und der Radius des der letzteren einbeschriebenen Kreises gleich r ist.

10. Den Kubikinhalt einer Pyramide zu berechnen, deren Höhe gleich h, und deren Grundfläche ein einem Kreise einbeschriebenes Viereck mit den Seiten a, b, c, d ist. $\alpha)$ $a = 62$, $b = 51$, $c = 38$, $d = 23$, $h = 17$; $\beta)$ 23, 19, 17, 11, 21; $\gamma)$ 0,315; 0,915; 0,535; 1,265; 0,995.

11. Den Inhalt der Grundfläche einer Pyramide aus ihrem Kubikinhalt V und der Höhe h zu berechnen. $V = 15\frac{3}{4}$, $h = 0{,}9$.

12. Eine Pyramide aus Gusseisen, dessen specifisches Gewicht 7,5 ist, wiege 1012,5 Kilogramm; ihre Grundfläche sei ein Quadrat, dessen Seite 45^{cm} lang ist. Wie hoch ist die Pyramide?

13. Die Ecken eines Würfels, dessen Kante gleich a ist, sind durch Ebenen abgestumpft, welche durch die Mitten der jedesmal der Ecke anliegenden Kanten gehen. Man berechne den Kubikinhalt des entstehenden Kubooktaëders.

Pyram. einer Kugel einbeschrieben.

14. In eine Kugel, deren Radius $r = 10^{cm}$ beträgt, ist eine gerade vierseitige Pyramide mit regelmässiger Basis, deren Inhalt $F = 128\ \square^{cm}$ ist, einbeschrieben; wie gross ist das Volumen der Pyramide?

15. In eine Kugel mit dem Radius r ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche beschrieben, deren Höhe sich zum Radius des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises wie $m : n$ verhält. Wie gross ist der Rauminhalt der Pyramide? $r = \frac{15}{16}$, $m : n = 2 : 1$.

Theile der Pyramide.

16. Von einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche gleichseitig ist, und deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt, sei die Grundkante a und die Seitenkante b gegeben. Durch die Mitte einer Seitenkante ist eine Ebene senkrecht zu der Grundfläche gelegt, so dass der Durchschnitt in derselben der gegenüberliegenden Grundkante parallel ist. Wie gross sind die beiden Theile der Pyramide? $a = 13{,}85641$, $b = 17$.

17. Die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide sind sämmtlich gleich a, die Seitenkanten sämmtlich gleich b. Durch eine auf der Grundfläche senkrechte Ebene, deren Durchschnittslinie in der Grundfläche einer Grundkante parallel ist, soll $\frac{1}{3}$ des Volumens der Pyramide abgeschnitten werden. Wie theilt diese Ebene die betreffende Seitenkante? $b = 3{,}30192$.

18. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rechteck, ihre Spitze liege senkrecht über dem Durchschnittspunkt der Diagonalen der Grundfläche. Die Pyramide soll durch eine Ebene, welche durch eine Kante der Grundfläche geht, in zwei gleiche Theile getheilt werden. In welchem Verhältniss theilt der Schnitt jede der gegenüberstehenden Seitenkanten?

19. Eine quadratische Pyramide, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind, wird durch einen ebenen Schnitt, welcher durch eine Grundkante und den Halbirungspunkt einer gegenüberliegenden Seitenkante geht, in zwei Theile zerlegt. In welchem Verhältniss stehen die Volumina derselben zu einander?

20. Wenn zwei dreiseitige Pyramiden die Grundfläche gemeinschaftlich haben, so wird die Verbindungsstrecke ihrer Spitzen von der Ebene der Grundfläche im Verhältniss der Volumina der Pyramiden getheilt.

21. Jede Ebene, welche einen Flächenwinkel einer drei-

seitigen Pyramide halbirt, theilt die gegenüberliegende Kante der letzteren im Verhältniss der anliegenden Grenzflächen der Pyramide, welche jenen Flächenwinkel einschliessen. (Kann u. a. mittelst des vorigen Satzes bewiesen werden.)

Vermischtes.

22. Ein Körper besteht aus einem Würfel mit der Kante a und aus geraden Pyramiden, welche auf die Würfelflächen aufgesetzt sind. Wie gross ist der Rauminhalt des Körpers, wenn durch seine sämmtlichen Eckpunkte eine Kugelfläche gelegt werden kann?

23. In der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Grundlinie gleich b, und dessen Schenkel gleich a ist, sei auf der Ebene desselben eine senkrechte Gerade errichtet; wie gross sind Oberfläche und Inhalt des dadurch bestimmten Tetraëders, wenn die längere Seitenkante c gegeben ist? $a = 89{,}01$, $b = 72{,}34$, $c = 99{,}88$.

24. Wie gross ist eine Grundkante einer geraden, regelmässig-sechsseitigen Pyramide, wenn das Volumen derselben gleich V und eine Seitenkante zweimal so lang als eine Grundkante ist? $V = 12$.

25. Wieviel beträgt der Flächeninhalt eines der Grundfläche parallelen Schnitts in einer Pyramide, wenn der Abstand desselben von der Grundfläche gleich dem dritten Theile der Höhe, diese Höhe gleich h und der Kubikinhalt der Pyramide gleich V ist? $V = 9$, $h = 0{,}4$.

26. Von einem Würfel mit der Kante a sind alle Ecken durch Ebenen derart abgestumpft, dass jede Kante von jedem ihrer Endpunkte aus um dieselbe Strecke verkürzt ist, und das Volumen des übrig bleibenden Körpers gleich $\frac{5}{6}$ des Würfels ist. Wie lang ist jene Strecke?

27. Die Halbirungspunkte der von den beiden Spitzen einer dreiseitigen Doppelpyramide, welche von lauter gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, ausgehenden Kanten seien die Eckpunkte eines zweiten, und die Mittelpunkte jener Dreiecke seien die Eckpunkte eines dritten Körpers. Wie verhalten sich die Volumina dieser beiden Körper zu einander und zu dem Volumen der Doppelpyramide?

28. Innerhalb eines geraden Prismas sei eine Linie parallel zu den Seitenkanten desselben gezogen, und die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den Grundflächen des Prismas seien

die Spitzen zweier Pyramiden, deren Grundflächen wechselsweise mit denen des Prismas zusammenfallen. Wie verhält sich das Volumen des beiden Pyramiden gemeinschaftlichen Raumtheils zu dem Volumen des Prismas?

29. Das Volumen einer von zehn gleichschenkeligen Dreiecken begrenzten Doppelpyramide aus der Randkante a und dem Abstand b der beiden Spitzen zu berechnen.

30. Aus einem Würfel von Thon, dessen Kante gleich a ist, soll eine gerade quadratische Pyramide geformt werden, deren Höhe gleich $\frac{3}{8}$ einer Grundkante ist. Wie lang wird letztere?

31. Eine regelmässig abgestufte Pyramide hat die quadratische Grundfläche gleich a^2 und Stufen von gleichmässiger Höhe und Breite b und läuft so in eine Plattform mit dem Inhalt $4\,b^2$ aus. Welches Volumen und welche Höhe hat dieselbe, und um wieviel höher wäre eine vollständige Pyramide ohne Stufen bei gleicher Basis und gleichem Rauminhalt? (Höhere arithmetische Reihe.) $a = 6^m$, $b = 6^{cm}$.

β 32. Die Gesammt-Oberfläche und das Volumen einer geraden Pyramide zu berechnen, deren Grundfläche ein regelmässiges Neuneck ist, wenn ihre Höhe gleich h und der Umfang der Grundfläche gleich u gegeben ist. $h = 42{,}6245$, $u = 20{,}5068$.

33. Von einer geraden dreiseitigen Pyramide sind eine Seitenkante $SA = s$, die beiden ihr anliegenden Grundkanten $AB = c$, $AC = b$, nebst den Winkeln $BAC = \alpha$, $SAB = \delta$, $SAC = \varepsilon$ gegeben; man berechne ihren Kubikinhalt.

34. Die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide ist ein Parallelogramm, dessen Seiten $a = 112{,}5$, $b = 43{,}5$ einen Winkel $\gamma = 117^0\ 20'\ 33'',4$ einschliessen. Die Höhe der Pyramide liegt in einer Ebene, welche durch diejenigen Seitenkanten bestimmt wird, die durch die nicht gemeinschaftlichen Endpunkte jener beiden Seiten gehen. Welches ist der Inhalt der Pyramide, wenn diese beiden Seitenkanten bezüglich $p = 100$ und $q = 146$ sind?

35. In einer geraden Pyramide bildet die Grundfläche, ein regelmässiges n-Eck mit der Seite a, mit einer Seitenfläche den Winkel α; man suche ihren Rauminhalt. $n = 24$, $a = 1{,}8757$, $\alpha = 67^0\ 11'$.

36. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich c, und worin ein Winkel gleich α ist. Eine Seitenkante derselben habe die Länge l und sei gegen

die Grundfläche unter einem Winkel gleich φ geneigt. Welches ist das Volumen der Pyramide? $c = 19{,}9941$, $\alpha = 21^0\,48'\,30''$, $l = 45{,}0290$, $\varphi = 54^0\,10'\,46''{,}7$.

37. Das Volumen einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche sei gleich V, der Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche gleich α. Wie gross sind die Kanten? $V = 58{,}778$, $\alpha = 68^0\,9'\,24''$.

38. Bei einer vierseitigen Pyramide mit rechtwinkeliger Grundfläche sei jede Seitenkante gleich s, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche gleich α, das Volumen der Pyramide gleich V. Wie gross sind die Kanten der Grundfläche? $s = 2{,}07452$, $\alpha = 29^0\,39'\,20''$, $V = 2{,}05286$.

39. Der Inhalt einer regelmässig-$n$seitigen Pyramide mit der Grundkante a sei gleich V gegeben. Wie gross ist der Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche?

40. Eine Kugel mit dem Radius R sei in der Entfernung $\frac{1}{2}R$ vom Mittelpunkt durch eine Ebene geschnitten, der Schnittfigur sei ein regelmässiges Sechseck einbeschrieben, und über letzterem sei in dem grösseren Kugelabschnitt eine gerade Pyramide construirt, deren Spitze in der Kugelfläche liegt. Man berechne das Volumen der Pyramide und die Winkel ihrer Seitenflächen gegen die Grundfläche. $R = 4$.

41. Die Kante eines Würfels sei gleich a. Man hat den Mittelpunkt einer Fläche mit den Eckpunkten der ihr parallelen Fläche verbunden, und es soll das Volumen der hierdurch bestimmten Pyramide, ihre Oberfläche und ihre Flächenwinkel berechnet werden.

42. Ebenso, wenn die Spitze der Pyramide der Mittelpunkt des Würfels ist.

43. Ebenso, wenn die Spitze der Pyramide ein Eckpunkt der ihrer Grundfläche parallelen Würfelfläche ist.

44. Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, werde durch eine Ebene, welche von einer Grundkante aus unter einem Winkel gleich α gegen die Grundfläche ansteigt, so getheilt, dass die dadurch abgeschnittene Pyramide k Kubikdecimeter Inhalt bekommt. Wie gross ist die Durchschnittsfigur, wie gross die Oberfläche der abgeschnittenen Pyramide und der Radius der ihr einbeschriebenen Kugel? $k = 4$, $\alpha = 54^0\,44'\,6''{,}7$.

45. In einer dreiseitigen Pyramide sei die Höhe gleich h gegeben, der Fusspunkt derselben sei der Mittelpunkt des der Grundfläche einbeschriebenen Kreises, der Umfang der Grundfläche sei gleich u und die Seiten derselben verhalten sich wie $p : q : r$. Man berechne **a**) das Volumen der Pyramide, **b**) die Oberfläche derselben, **c**) die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche. $h = 6$, $u = 120$, $p : q : r = 5 : 12 : 13$.

§. 21. Die abgestumpfte Pyramide.

Für sich. α

1. Man berechne den Kubikinhalt einer abgestumpften Pyramide aus den Grundflächen G, g und der Höhe h für α) $G = 144\ \square^{cm}$, $g = 81\ \square^{cm}$, $h = 17^{cm}$; β) $G = 24{,}3$, $g = 7{,}5$, $h = 9$; γ) $G = 0{,}84$, $g = 0{,}21$, $h = 0{,}09$.

2. Ebenso aus den Grundflächen G, g und der Höhe p der Ergänzungspyramide. α) $G = 3024\ \square^{cm}$, $g = 21\ \square^{cm}$, $p = 27^{cm}$; β) $G = 1{,}089$, $g = 0{,}9$, $p = 0{,}5$; γ) $G = 63{,}99$, $g = 0{,}79$, $p = 20{,}34$.

3. Den Kubikinhalt einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide aus den Seiten a, b, c der grösseren Endfläche, der zur Seite a homologen Seite a_1 der kleineren Endfläche und der Länge d der einander gleichen Seitenkanten zu berechnen. $a = 5$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 0{,}8125$, $\alpha_1 = 4\frac{1}{2}$.

4. Eine abgestumpfte Pyramide hat zu Endflächen zwei gleichseitige Dreiecke mit den Seiten $a = 12$ und $b = 33$, und eine Höhe $h = 2{,}3094$. Wie gross ist der Inhalt des Stumpfes, und wie gross die Höhe der Ergänzungspyramide?

5. Aus dem Kubikinhalt V einer abgestumpften Pyramide, ihrer Höhe h und dem Inhalt G der einen Grundfläche den Inhalt der anderen zu berechnen. α) $V = 375$ Kubikmeter, $G = 192\ \square^{m}$, $h = 5^{m}$; β) $V = 204{,}785$, $G = 295{,}84$, $h = 1{,}5$.

6. Aus dem Kubikinhalt V einer abgestumpften Pyramide und den Flächeninhalten G, g ihrer Grundflächen das Volumen der Ergänzungspyramide zu berechnen. $G = 1{,}44$, $g = 0{,}81$, $V = 5{,}13$.

7. Das Volumen einer abgestumpften geraden vierseitigen Pyramide mit rechteckigen Grundflächen sei $V = 630$ Kubikdecimeter, ihre Höhe $h = 15^{dc}$, der Umfang der unteren Grund-

fläche $U = 40^{dc}$, der Umfang der oberen $u = 10^{dc}$. Wie gross sind die Kanten der Pyramide?

8. Das Volumen einer abgestumpften Pyramide beträgt $V = 1{,}720$ Kubikmeter, der Inhalt der grösseren Endfläche $G = 1{,}8\ \square^{m}$, die Höhe $h = 2^{m},4$. Wie gross ist das Volumen der Ergänzungspyramide?

9. Wieviel beträgt das Volumen einer vollständigen Pyramide mit der Grundfläche G und einer derselben parallelen Schnittebene gleich g, wenn der durch letztere abgeschnittene Stumpf den Kubikinhalt V hat?

10. Bei einer abgestumpften Pyramide sei die Höhe $h = 1{,}5^{m}$, die Summe der beiden Endflächen $S = 4{,}58\ \square^{dc}$, das Volumen $V = 3{,}395$ Kubikdecimeter. Wie gross sind die Endflächen, die Höhe der Ergänzungspyramide und das Volumen der vollständigen Pyramide? Zweites Zahlenbeispiel: $h = 20$, $S = 300$, $V = 2960$.

11. Das Volumen einer abgestumpften Pyramide mit der Höhe h sei gleich V, die Differenz der Flächeninhalte der Endflächen gleich d. Wie gross sind diese Endflächen?

12. Eine abgestumpfte quadratische Pyramide aus Granit wiege $p = 11388$ Kilogramm, ihre Höhe betrage $h = 2{,}5108$ Meter, die untere Kante $a = 1{,}5693$ Meter. Wie gross ist die obere Kante, wenn das specifische Gewicht des Granits $s = 2{,}6$ ist?

13. Eine abgestumpfte, gerade, quadratische Pyramide von Sandstein, dessen specifisches Gewicht 2,5 ist, wiege 9620 Kilogramm, ihre Höhe sei gleich 2,4 Meter, und die Kante der unteren Grundfläche sei um 7 Decimeter länger als die der oberen. Wie lang sind die Kanten und wie gross die Seitenflächen dieses Körpers?

14. Den Rauminhalt einer abgestumpften geraden, regelmässig-fünfseitigen Pyramide aus dem grossen Halbmesser r der unteren, dem grossen Halbmesser ϱ der oberen Endfläche und der Seitenlinie s zu berechnen. $r = 4$, $\varrho = 1$, $s = 5$.

15. Eine Pyramide wird durch einen zu der Grundfläche parallelen Schnitt, dessen Inhalt sich zu dem der Grundfläche wie $m^2 : n^2$ verhält, getheilt. Wie verhalten sich die Kubikinhalte der beiden Theile zu einander? (Zahlenbeispiel beliebig.) Theilung vollständiger u. abgest. Pyramiden.

16. In welchem Verhältniss muss die Höhe einer Pyramide durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt getheilt werden,

damit die abgeschnittene Pyramide den n^{ten} Theil der ganzen betrage? $n = 8$.

17. Eine Pyramide ist durch eine zur Grundfläche parallele Ebene halbirt worden. In welchem Verhältniss steht **a**) die Höhe der gegebenen Pyramide zur Höhe der Ergänzungspyramide, **b**) die Höhe der letzteren zu der Höhe des Stumpfs?

18. Eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, den Grundkanten b, c und der Seitenkante a soll durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche halbirt werden. In welchem Abstand von der Spitze ist der Schnitt zu legen? $b = 4$, $c = 3$, $a = 3{,}5496$.

19. Eine $h = 7^m$ hohe Pyramide soll durch zwei Ebenen, die mit ihrer Grundfläche parallel sind, in drei gleiche Theile getheilt werden. Wie hoch ist jeder dieser Theile zu nehmen?

20. In welchem Verhältniss wird eine abgestumpfte Pyramide, deren Endflächen regelmässige Polygone mit den Seiten a, b sind, durch einen den Endflächen parallelen, die Höhe halbirenden Schnitt getheilt? $a = 4$, $b = 5$.

21. Eine abgestumpfte Pyramide, deren Endflächen Quadrate mit den Seiten a, b sind, soll durch einen zu der Grundfläche parallelen Schnitt halbirt werden. In welchem Verhältniss wird die Höhe durch denselben getheilt?

22. Aus einer Pyramide von gegebener Grundfläche G und Höhe H soll durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen ein Stück herausgeschnitten werden, dessen Höhe h und Volumen V gegeben sind. Man berechne den Abstand des unteren Schnitts von der Grundfläche. $G = 625\,\square^m$, $H = 50^m$, $V = 336$ Kubikm., $h = 12^m$.

Zwei Pyramiden.

23. Zwei gerade Pyramiden von gleichem Volumen haben zu Grundflächen Quadrate, deren Seiten bezüglich einander parallel sind, und von denen das eine einem Kreise umbeschrieben, das andere demselben Kreise einbeschrieben ist. Man soll aus dem Radius dieses Kreises und der Höhe der letzteren Pyramide das Volumen des beiden Körpern gemeinsamen Stücks berechnen.

24. Zwei gerade quadratische Pyramiden haben ihre Höhen in derselben Geraden, ihre Grundflächen in derselben Ebene und liegen auf derselben Seite dieser Ebene; die Kanten der Grundfläche der einen sind paarweise den Grundkanten der anderen

parallel und doppelt so lang als diese, die Höhe der ersteren dagegen ist halb so gross als die Höhe der letzteren. Man berechne das Volumen des den beiden Pyramiden gemeinschaftlichen Körperstücks aus der Grundkante a und der Seitenkante b der ersteren. $a = 24$, $b = 17$.

Mit Kegel.

25. Aus einem abgestumpften Kegel mit der Höhe h und den Radien R und r soll eine möglichst grosse abgestumpfte quadratische Pyramide herausgeschnitten werden. Wieviel beträgt das Volumen derselben?

Mit Kugel.

26. Eine gerade Pyramide, deren Höhe gleich h ist, habe zur Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a, b. Ueber dem der Grundfläche umbeschriebenen Kreis sei mit dem Radius desselben eine Halbkugel construirt, und durch drei Durchschnittspunkte der letzteren mit den Seitenkanten der Pyramide sei eine Ebene gelegt. Man soll das Volumen des zwischen dieser Ebene und der Grundfläche liegenden Theils der Pyramide berechnen. $a = 3{,}6$, $b = 1{,}5$, $h = 1{,}4$.

Mit regelm. Polyedern.

27. Die Endpunkte der von zwei gegenüberliegenden Eckpunkten eines regelmässigen Ikosaëders auslaufenden Kanten bestimmen zwei congruente regelmässige Fünfecke mit parallelen Ebenen. Das eine dieser Fünfecke sei die Grundfläche, der entferntere jener beiden Eckpunkte die Spitze einer von der Ebene des anderen Fünfecks geschnittenen Pyramide. Man berechne das Volumen des zwischen beiden Ebenen liegenden Pyramidenstumpfs aus der Kante a des Ikosaëders.

28. Aus der Kante a eines regelmässigen Pentagonaldodekaëders das Volumen einer abgestumpften Pyramide zu bestimmen, deren Endflächen eine Grenzfläche des Polyeders und derjenige ebene Schnitt desselben sind, welcher durch die Endpunkte der fünf von jener Grenzfläche ausgehenden Kanten bestimmt ist.

Mit Prismen.

29. In einem Prisma sei eine zu den Seitenkanten parallele Gerade gezogen, welche die eine Grundfläche in einem Punkte A, die andere in einem Punkte B schneidet. Von jedem dieser Punkte aus seien Strahlen durch alle Eckpunkte der zugehörigen Grundfläche gezogen, und man habe die von A ausgehenden Strahlen zwischen A und dem betreffenden Eckpunkt, die von B ausgehenden auf den Verlängerungen über die Eckpunkte hinaus, sämmtlich in gleichem Verhältniss $m : n$ getheilt, die Theilpunkte in jeder der beiden Grundflächen den Seiten der letzteren entsprechend

verbunden und die entstandenen Figuren zu Grundflächen einer abgestumpften Pyramide gemacht. Für welche Werthe von $m:n$ beträgt der Inhalt der letzteren $\frac{7}{12}$ des Inhalts des Prismas?

30. In der oberen Grundfläche eines dreiseitigen Prismas seien die Halbirungspunkte der Seiten mit einander durch gerade Linien verbunden, in der Ebene der unteren Grundfläche sei durch jeden Eckpunkt der letzteren die Parallele zu der gegenüberliegenden Seite gezogen; man erhält so zwei Dreiecke, welche zu Grundflächen einer abgestumpften Pyramide gemacht werden können. Es sei nun aus letzterer dasjenige Körperstück herausgeschnitten, welches sie mit dem Prisma gemeinschaftlich hat; wie verhält sich der Rauminhalt des übrig bleibenden Körpers zu dem des Prismas?

β 31. Man berechne den Rauminhalt einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide, wenn die Kanten der unteren Grundfläche bezüglich gleich a, b, c, die der Kante a entsprechende der oberen Grundfläche gleich a_1, die Länge einer Seitenkante gleich s und der Neigungswinkel der letzteren gegen die Grundfläche gleich φ gegeben ist. $a = 10$, $b = 4\frac{1}{4}$, $c = 10\frac{1}{4}$, $a_1 = 2$, $s = 28$, $\varphi = 63^0\,14'$.

32. Eine abgestumpfte gerade Pyramide hatte zu Endflächen Quadrate von bezüglich a^2 und b^2 Quadratmeter Inhalt, und das Volumen derselben betrug V Kubikmeter. Unter welchem Winkel waren die Seitenkanten, unter welchem die Seitenflächen gegen die Grundfläche geneigt? $a = 8$, $b = 4$, $V = 336$.

33. Eine abgestumpfte Pyramide habe zur Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten $a = 5{,}5$, $b = 4{,}5$, $c = 4$; der Seite a entspreche in der anderen Endfläche eine Kante von der Länge $a_1 = 3{,}5$; das Volumen des Pyramidenstumpfs betrage $V = 35{,}6795$. Unter welchem Winkel ist eine Seitenkante desselben, welche die Länge $d = 10{,}6587$ hat, gegen die Grundfläche geneigt?

34. In eine Kugel mit dem Radius r ist eine abgestumpfte Pyramide, deren Endflächen regelmässige Achtzehnecke sind, und deren grössere Endfläche eine Kante gleich a hat, so gestellt, dass ihre Eckpunkte sämmtlich auf der Kugelfläche liegen; die Höhe des Stumpfes ist gleich h. Wie gross ist sein Volumen? $r = 3\frac{1}{4}$, $a = 0{,}70848$, $h = 5{,}76$.

35. Um eine abgestumpfte, gerade, regelmässig-neunseitige Pyramide ist ein vollständiger Kegel beschrieben, dessen der

grösseren Grundfläche der Pyramide umbeschriebener Grundkreis den Radius r hat, und dessen Seitenlinie $n$mal so lang als eine Seitenkante des Pyramidenstumpfs und gegen die Grundfläche unter dem Winkel φ geneigt ist. Man berechne das Volumen der abgestumpften Pyramide. $r = 11{,}699$, $n = 3$, $\varphi = 60^0\,14'\,20''$.

§. 22. Die regelmässigen Polyeder.

1. Man berechne den Kubikinhalt für jedes der regelmässigen Polyeder aus der Kante a. a

2. Ein regelmässiges Tetraëder habe mit einem regelmässigen Oktaëder gleiche Oberfläche; wie verhalten sich ihre Kubikinhalte zu einander? Tetraëder, Oktaëder u. Würfel für sich.

3. Aus einem regelmässigen Tetraëder mit der Kante a soll ein gleichgrosser Würfel geformt werden; wie gross wird die Oberfläche des letzteren? $a = 8{,}3268$.

4. Das Volumen eines regelmässigen Tetraëders aus der Höhe h desselben zu berechnen. $h = 8{,}3268$.

5. Das Volumen eines regelmässigen Tetraëders aus dem Umfang u des seiner Grundfläche umbeschriebenen Kreises zu berechnen. $u = 69{,}6733$.

6. Die Kante eines Würfels sei gleich a. Wie gross ist das Volumen eines regelmässigen Tetraëders, dessen Kanten Diagonalen der Würfelflächen sind?

7. Die Oberfläche eines regelmässigen Oktaëders aus seinem Volumen V zu berechnen. $V = 43{,}465$.

8. Wie gross ist das Oktaëder, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Flächen eines Würfels sind, dessen Kante gleich a ist?

9. Ein regelmässiges Oktaëder habe mit einem Würfel gleiche Oberfläche; wie verhalten sich die Volumina der beiden Körper zu einander?

10. Den Kubikinhalt eines regelmässigen Oktaëders zu berechnen, welches einer Kugel mit dem Radius r umbeschrieben ist.

11. Den Kubikinhalt eines Kubooktaëders aus der Kante a zu berechnen.

12. In einen Würfel sei ein regelmässiges Tetraëder construirt, so dass ein Eckpunkt des letzteren auf einem Eckpunkt des Würfels und die übrigen Tetraëder-Ecken auf den von der

gegenüberliegenden Würfel-Ecke ausgehenden Flächen-Diagonalen liegen. Wie verhalten sich die kubischen Inhalte beider Körper zu einander?

13. Die Anzahl der Meter der Summe aller Kanten plus der Anzahl der Quadratmeter der Oberfläche plus der Anzahl der Kubikmeter des Inhalts eines Würfels beträgt 100. Wie gross ist die Kante desselben? (Die reducirte Gleichung wird eine reine kubische.)

14. An einem Würfel, einem regelmässigen Tetraëder und einem regelmässigen Oktaëder ist jede Kante $a = 71$. Wie gross ist die Kante des regelmässigen Tetraëders, dessen Volumen der Summe der Volumina dieser drei Körper gleich ist?

15. Die Höhe eines regelmässigen Tetraëders werde über die Grundfläche verlängert, und von einem Punkte der Verlängerung werden gerade Linien durch die Eckpunkte der Grundfläche bis zu einer parallel zu dieser durch die Spitze gelegten Ebene gezogen. In welchem Abstand von der Grundfläche ist der Punkt anzunehmen, damit die hierdurch bestimmte Pyramide das Sechsfache des Tetraëders werde?

In Verbindung mit der Kugel.

16. Wie verhält sich der Rauminhalt eines regelmässigen Tetraëders, welches einer Kugel mit dem Radius r einbeschrieben ist, zu dem Rauminhalt eines derselben Kugel umbeschriebenen regelmässigen Tetraëders?

17. Dieselbe Aufgabe für **a**) ein Oktaëder, **b**) ein Ikosaëder, **c**) ein Hexaëder, **d**) ein Pentagonaldodekaëder.

18. Aus dem Kubikinhalt V eines regelmässigen Oktaëders den Kubikinhalt eines regelmässigen Tetraëders zu berechnen, welches sich mit jenem derselben Kugel einbeschreiben lässt. $V = 1000$.

19. Ein regelmässiges Tetraëder und ein regelmässiges Oktaëder sollen dieselbe innere Berührungskugel haben. Man drücke die Volumina beider Körper durch den Radius dieser Kugel aus und bestimme ihr Verhältniss.

20. Wie gross ist der Radius einer Kugel, für welche das um dieselbe beschriebene regelmässige Oktaëder denselben Rauminhalt hat, wie das in eine Kugel mit dem Radius r beschriebene regelmässige Tetraëder? $r = 6{,}31$.

21. In eine Halbkugel vom Radius r hat man einen Würfel, in diesen eine Kugel und in letztere ein regelmässiges Tetraëder

einbeschrieben. Man soll die Oberfläche und das Volumen des letzten Körpers berechnen.

22. Um einen Würfel mit der Kante a sei eine Kugel beschrieben, um diese ein regelmässiges Tetraëder, um dieses wieder eine Kugel und um diese Kugel endlich ein regelmässiges Oktaëder. Wie gross ist der Kubikinhalt dieses Oktaëders? $a = \frac{2}{3}$.

23. In eine Halbkugel mit dem Radius r hat man einen Würfel, in diesen eine Kugel, um diese ein regelmässiges Oktaëder, um letzteres wieder eine Kugel und um diese endlich ein regelmässiges Tetraëder beschrieben. Wie gross ist der Inhalt des Tetraëders?

Einbeschriebene Körper.

24. Wie verhalten sich die Volumina zweier Würfel zu einander, welche demselben regelmässigen Oktaëder so einbeschrieben werden können, dass die Eckpunkte des einen auf acht Kanten des Oktaëders liegen, während die Eckpunkte des anderen die Mittelpunkte der Oktaëderflächen sind?

25. Um die drei Eckpunkte einer Seitenfläche eines regelmässigen Oktaëders sind mit der Kante desselben als Radius Kugeln beschrieben; ein Durchschnittspunkt der drei Kugelflächen sei die Spitze einer auf jener Seitenfläche als Grundfläche stehenden Pyramide. Welches sind die Dimensionen der letzteren, und wie verhält sich ihr Volumen zu dem des Oktaëders?

26. In ein regelmässiges Oktaëder sei ein Körper gestellt, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Oktaëderflächen sind; in diesen Körper sei auf gleiche Weise ein dritter construirt, in den dritten ein vierter, u. s. f. bis in's Unendliche. Wie verhält sich das Volumen des Oktaëders zur Summe der Volumina der folgenden Körper?

Theilung des Tetraëders.

27. Ein regelmässiges Tetraëder sei durch zwei zu einer seiner Flächen parallele Ebenen in drei gleiche Theile getheilt; wie verhalten sich die Oberflächen dieser Stücke zu einander?

28. Durch die Spitze eines regelmässigen Tetraëders mit der Kante a sei eine Ebene senkrecht auf die Grundfläche gelegt, so dass ihre Durchschnittslinie mit dieser einer Grundkante parallel ist. Wie gross sind die beiden Theile des Tetraëders?

29. Der Radius des Kreises, welcher sich um die Grundfläche eines regelmässigen Tetraëders beschreiben lässt, sei gegeben. Man berechne die Entfernung von der Spitze des Tetra-

ëders, in welcher man durch dasselbe eine Ebene parallel der Grundfläche so legen kann, dass sie das Tetraëder halbirt.

Dodekaëder. 30. In ein regelmässiges Pentagonaldodekaëder kann man einen Würfel so hineinstellen, dass die Würfelkanten Diagonalen der Dodekaëderflächen werden. Wie verhalten sich die Volumina beider Körper zu einander?

31. In jedes regelmässige Pentagonaldodekaëder lässt sich eine regelmässig-zehnseitige Doppelpyramide beschreiben, deren Spitzen in den Mittelpunkt, und deren andere Eckpunkte auf einen grossen Radius je einer Grenzfläche des Dodekaëders fallen. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Körper zu einander?

32. Die Kante eines regelmässigen Pentagonaldodekaëders sei gleich a gegeben; wie gross ist der Inhalt des regelmässigen Tetraëders, welches mit dem Dodekaëder gleiche Oberfläche hat?

Dodekaëder mit Ikosaëder. 33. Die Schwerpunkte der Flächen eines regelmässigen Ikosaëders sind die Eckpunkte eines regelmässigen Pentagonaldodekaëders. Wie verhalten sich die Volumina beider Körper zu einander?

34. Wie verhält sich das Volumen eines regelmässigen Pentagonaldodekaëders zu dem Volumen desjenigen Ikosaëders, welches von den durch die Endpunkte der Kanten je einer Ecke des ersteren bestimmten Ebenen eingeschlossen wird?

β 35. Wie verhält sich das Volumen eines regelmässigen Ikosaëders zu dem Volumen desjenigen Pentagonaldodekaëders, welches nach Aufgabe 10 in §. 13 zu demselben construirt werden kann?

36. Durch eine Grundkante eines regelmässigen Tetraëders sei eine Ebene unter dem Neigungswinkel α gegen die Grundfläche gelegt; der Flächeninhalt der Schnittfigur sei gleich F. Wie gross ist das Volumen des Tetraëders? $\alpha = 9^0\ 15'\ 52'',8$, $F = 26{,}183$.

37. Auf jede Fläche eines regelmässigen Oktaëders als Grundfläche sei eine gerade Pyramide aufgesetzt, deren Seitenflächen mit der zugehörigen Grundfläche sämmtlich den Winkel α bilden. Wie gross ist das Volumen des ganzen so entstandenen Körpers? $a = 9$, $\alpha = 57^0\ 45'\ 51'',4$.

38. Wie gross muss in der vorigen Aufgabe der Winkel α sein, damit das Volumen des entstandenen Körpers das Doppelte des Volumens des Oktaëders betrage?

§. 23. Der Cylinder.

1. Den Kubikinhalt eines Cylinders aus dem Radius r seiner Grundfläche und aus seiner Höhe h zu berechnen für α) $r = 2{,}38805$, $h = 42{,}7$; β) $r = 2{,}34963$, $h = 57{,}6$; γ) $r = 1{,}60337$, $h = 0{,}525$. Für sich.

2. Ein cylindrisches Gefäss hat im Lichten einen Durchmesser von 30^{cm} und eine Tiefe von 40^{cm}. Wieviel Liter fasst es?

3. Ein Brunnen hat einen Durchmesser von 1,6 Meter. Wieviel Hektoliter Wasser sind in demselben, wenn das Wasser darin $3{,}2^{m}$ hoch steht?

4. Der Umfang der Grundfläche eines Cylinders beträgt $u = 10^{cm}$, seine Höhe $h = 7{,}1^{cm}$; wieviel beträgt sein Kubikinhalt?

5. Ein Quartblatt Papier ist a^{m} breit und b^{m} hoch. Man kann damit den Mantel eines Cylinders von a^{m} Höhe oder den Mantel eines solchen von b^{m} Höhe bekleiden. Wie verhalten sich die Volumina dieser beiden Cylinder?

6. Aus dem Kubikinhalt V eines Cylinders und dem Radius r seiner Grundfläche seine Höhe zu berechnen. α) $V = 20{,}644$, $r = 1{,}48$; β) $V = 23779$, $r = 43{,}5$. γ) Ein cylindrisches Litermass habe 92^{mm} Durchmesser; wie hoch ist es?

7. Aus dem Kubikinhalt V und der Höhe h eines Cylinders den Umfang seiner Grundfläche zu berechnen. $V = 272856$, $h = 21{,}43$.

8. Aus dem Kubikinhalt V eines Cylinders und dem Verhältniss seiner Höhe zum Durchmesser seiner Grundfläche gleich $m : n$ diese beiden Linien selbst zu berechnen. $V = 47\frac{5}{11}$, $m : n = 3 : 5$.

9. Verkürzt man die Höhe eines Cylinders unter Beibehaltung der Grundfläche um δ^{cm}, so verringert sich sein Rauminhalt um A Kubcm.; verkleinert man aber den Radius der Grundfläche unter Beibehaltung der ursprünglichen Höhe um ε^{cm}, so verringert sich sein Rauminhalt um B Kubcm. Wieviel beträgt das Volumen des anfänglichen Cylinders? $\delta = 11{,}3$, $\varepsilon = 1$, $A = 35{,}5$, $B = 192$.

10. Ein Cylinder hat den Grundflächen-Radius r und die Höhe h. Verkleinert man das eine Mal den ersteren um eine gewisse Grösse, und vermindert man ein anderes Mal die letztere um die gleiche Grösse, so soll in dem einen Falle der neu ent-

stehende Cylinder dasselbe Volumen haben, wie in dem anderen. Wieviel muss jene Grösse betragen? $r = 6$, $h = 5$.

11. Vergrössert man den Radius eines gewissen geraden Cylinders um eine bestimmte Grösse x und vermindert gleichzeitig die Höhe um dieselbe Grösse, oder vermindert man den Radius und vergrössert gleichzeitig die Höhe um dieselbe, so hat in beiden Fällen der neue Cylinder $\frac{1}{3}$ des Rauminhalts des ursprünglichen. Wie verhält sich der Radius des letzteren zu seiner Höhe, und wie gross ist x?

12. Die Formel für das Volumen eines Cylinders ändert ihren Werth nicht, wenn an Stelle des Radius die Summe oder die Differenz des Radius und einer bestimmten Grösse x, und gleichzeitig an Stelle der Höhe bezüglich die Differenz oder Summe der Höhe und derselben Grösse x tritt. Wie verhält sich der Radius zur Höhe, und welchen Werth hat die Grösse x?

Röhre. 13. Man berechne den Kubikinhalt einer cylindrischen Röhre aus den Radien R, r und der Höhe h. $R = 12$, $r = 8$, $h = 3{,}1831$.

14. Aus dem Volumen V der Wand einer cylindrischen Röhre, dem grösseren Radius R und der Höhe h die Dicke derselben zu berechnen. $V = 175{,}9292$, $R = 5$, $h = 3{,}5$.

Mit seiner Oberfläche. 15. Aus dem Mantel und dem Volumen eines geraden Cylinders seine Höhe und den Radius seiner Grundfläche zu berechnen. $\alpha)$ $M = 37{,}6991$ □^{m}, $V = 37{,}6991$ Kubm.; $\beta)$ $M = 2a^2$; $V = a^3$.

16. Wieviel beträgt das Volumen eines geraden Cylinders, dessen Höhe sich zu seinem Durchmesser wie $m : n$ verhält, und dessen Mantel gleich M ist? $m : n = 3 : 2$, $M = 91{,}016$.

17. Wie gross ist die gesammte Oberfläche eines geraden Cylinders, dessen Höhe sich zu seinem Durchmesser wie $m : n$ verhält, und dessen Volumen gleich V ist? $m : n = 1 : 2$, $V = 64\pi$.

18. Man berechne das Volumen eines geraden Cylinders aus seiner Mantelfläche M und seiner Gesammt-Oberfläche O. $M = 1000$, $O = 1025{,}1327$.

19. Der Mantel eines geraden Cylinders betrage ebensoviele Quadratmeter, als sein Volumen Kubikmeter beträgt; wie gross ist der Durchmesser seiner Grundfläche?

20. Aus den Mänteln zweier geraden Cylinder von gleichen

Höhen, deren Volumina bezüglich gleich V und V_1 sind, soll durch Zusammenfügen derselben der Mantel eines dritten solchen Cylinders gebildet werden. Man berechne das Volumen desselben. $V = 0{,}75$, $V_1 = 0{,}48$.

21. Der Mantel eines geraden Cylinders bilde in eine Ebene aufgerollt ein Quadrat, dessen Diagonale gleich d gegeben ist. Man soll den Inhalt eines Axenschnitts und das Volumen des Cylinders berechnen.

22. Eine Walze aus Kork, deren Grundflächen-Radius gleich r ist, soll der Länge nach durch eine concentrische Cylinderfläche so ausgebohrt werden, dass sie, nachdem die Höhlung durch eine genau in dieselbe passende Walze von Blei ausgefüllt worden, auf Wasser gelegt, zur Hälfte einsinke. Welchen Radius muss die Walze aus Blei haben? Specifisches Gewicht des Korkes gleich 0,24, des Bleies gleich 11,33. $r = 36{,}77$. Spec. Gew.

23. Ein gerader Cylinder, dessen Grundfläche 17 Quadratdecimeter und dessen Gewicht 284 Kilogramm beträgt, sei von oben bis zur Mitte seiner Höhe so ausgehöhlt, dass die Wand des Restes überall die Dicke 7^{cm} hat. Darauf sei die Höhlung mit Oel gefüllt worden. Wieviel wiegt dann das Ganze, wenn das specifische Gewicht des Oels 0,9 und dasjenige des Stoffes, aus welchem der Cylinder angefertigt ist, 3,4 beträgt?

24. Eine Röhre von Kupfer ist $a = 1{,}2^m$ lang und wiegt $p = 90$ Kgr. Ihr äusserer Durchmesser beträgt $d = 0{,}75^m$. Wie dick ist die Wandung derselben, wenn das specifische Gewicht des angewendeten Kupfers $s = 9$ ist, und wieviel Kilogramm Wasser kann die Röhre aufnehmen?

25. Ein quadratischer Brunnenschacht, dessen Seitenkante gleich a und dessen Tiefe gleich h ist, soll ausgemauert werden, so dass die cylindrische Mauer im Lichten einen Durchmesser gleich d habe. Man berechne den Kubikinhalt des Mauerwerks. $a = 10{,}1$; $d = 8{,}885582$; $h = 10$. Mit Polyeder.

26. Um ein gerades, rechtwinkeliges Parallelepipedon, dessen Kanten sich wie 1 : 10 : 24 verhalten, lassen sich drei gerade Cylinder beschreiben. Wie verhalten sich ihre Mäntel, wie ihre Oberflächen, und wie ihre Volumina zu einander?

27. Ein Cylinder mit horizontaler Grundfläche, deren Radius gleich r gegeben ist, sei bis zu einer gewissen Höhe mit Wasser gefüllt. Um wieviel wird das Wasser in dem Cylinder steigen,

wenn man ein regelmässiges Tetraëder hineinwirft, dessen Kante gleich a ist, und welches ganz in dem Wasser untersinkt? $a = 5$, $r = 4$.

Mit Kugel. 28. Wie gross ist der Kubikinhalt eines Cylinders, dessen Grundflächen die Parallelkreise von 30^0 nördlicher und 30^0 südlicher Breite auf einem Globus sind, wenn der Radius der Kugel gleich r ist?

29. Wie gross ist das Volumen eines Cylinders, welcher einer Kugel einbeschrieben wurde, deren Radius gleich r ist, und deren Oberfläche sich zu derjenigen des Cylinders wie $m : n$ verhält? $r = 8$, $m : n = 12 : 5$.

Mit regelm. Polyeder. 30. Wie verhalten sich die Volumina zweier geraden Cylinder zu einander, deren einer durch die vier Eckpunkte eines regelmässigen Tetraëders so gelegt ist, dass zwei gegenüberliegende Tetraëderkanten Durchmesser in seinen Grundflächen sind, während der andere einen Würfel mit derselben Kante so umgiebt, dass vier Eckpunkte des letzteren in Durchmessern seiner Grundflächen, die vier anderen in seiner Mantelfläche liegen?

31. In ein regelmässiges Oktaëder seien zwei Cylinder so gestellt, dass die Mittelpunkte der Oktaëderflächen auf den Peripherien der Grundflächen des einen und die Halbirungspunkte der von zwei gegenüberliegenden Eckpunkten des Oktaëders ausgehenden Kanten auf den Peripherien der Grundflächen des anderen Cylinders liegen. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Cylinder zu einander?

32. Durch einen Würfel seien zwei ebene Schnitte parallel zu zwei einander diametral gegenüberliegenden Kanten gelegt, so dass jeder zwei in einer dieser Kanten zusammenstossende Flächen halbirt, und es sei ein Cylinder construirt, dessen Grundflächen je einem dieser Schnitte umbeschrieben sind. Ein zweiter gerader Cylinder habe jene Kanten zu Durchmessern seiner Grundflächen. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Cylinder?

Mit in u. um die Grundfl. beschriebenen Figuren. 33. Um ein Viereck, dessen Seiten der Reihe nach gleich a, b, c, d sind, sei ein Kreis beschrieben, und über diesem als Grundfläche sei ein Cylinder von der Höhe h construirt. Man berechne das Volumen desselben. $a = 24{,}5$, $b = 14{,}5$, $c = 20{,}5$, $d = 5{,}5$, $h = 8\frac{9}{13}$.

34. Ein Cylinder sei einem dreiseitigen Prisma einbeschrieben, dessen Kubikinhalt gleich K ist, und dessen Grundfläche die

Seiten a, b, c hat. Man berechne das Volumen des Cylinders. $a = 44$, $b = 39$, $c = 17$, $K = 241{,}144$.

Durchschnittene Cylinder.

35. In der Grundfläche eines geraden Cylinders, dessen Höhe gleich h und dessen Radius gleich r gegeben ist, sei eine diesem Radius gleiche Sehne gezogen, und durch letztere sei eine Schnittebene parallel zu der Axe gelegt. Man berechne die Volumina der beiden Theile des Cylinders. $h = 18{,}2704$, $r = 4{,}7032$.

36. Man berechne das Volumen eines mittelst zweier durch die Axe gehenden Ebenen entstandenen Ausschnitts eines geraden Cylinders, wenn die Grundfläche desselben ein Sector mit einem Centriwinkel von $22^0\ 30'$, die Summe seiner beiden Endflächen gleich der Summe der beiden rechtwinkeligen Begrenzungsebenen und der Inhalt eines Axenschnitts des ganzen Cylinders gleich F ist. $F = 4{,}509$.

37. Ueber jeder Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei aus dem gegenüberliegenden Eckpunkt mit der Seite als Radius ein Kreisbogen beschrieben. Die entstandene dreiseitige, krummlinige Figur bewege sich, indem ihre Ebene ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, so, dass jeder Eckpunkt eine zu dieser Ebene senkrechte Gerade von der Länge der Seite des Dreiecks beschreibe. Man berechne den Mantel, die Oberfläche und das Volumen des beschriebenen Körpers aus dieser Länge a.

Schiefer Schnitt.

38. Ein gerader Cylinder, dessen Grundfläche den Radius r hat, sei durch eine zu letzterer schiefe Ebene so abgeschnitten, dass die längste Seitenlinie des abgestutzten Cylinders gleich S, die kürzeste gleich s ist. Wie gross ist der Kubikinhalt des letzteren Körpers? $r = 6$, $S = 3\frac{4}{5}$, $s = 1\frac{5}{12}$.

39. Sechs gleiche cylindrische Röhren mit dem Radius r der Grundfläche der inneren Wandung schneiden sich so, dass ihre Axen ein regelmässiges Sechseck bilden, an dessen Ecken je zwei benachbarte Röhren in einer schiefen Abstumpfungsfläche aneinander stossen; die Seite dieses Sechsecks sei gleich a. Wie gross ist der innere Hohlraum des so entstandenen Körpers?

40. Die Axe eines Cylinders sei gegen die Grundfläche desselben unter dem Winkel α geneigt und habe die Länge a; der Radius der Grundfläche sei gleich r. Wie gross ist der Rauminhalt des Cylinders? $\alpha = 76^0\ 4'\ 40''$, $a = 16{,}066$, $r = 2{,}090$. β

41. Die Axe eines Cylinders sei gleich a und gegen die Grundfläche, deren Peripherie gleich dem Vierfachen der Höhe ist,

unter dem Winkel α geneigt. Wie gross ist die Kante eines dem Cylinder gleichen Würfels? $a = 1{,}3616$, $\alpha = 66^0\ 10'\ 18''$.

42. Ein vierseitiges Prisma mit der Höhe h, dessen Grundfläche ein Rhombus mit der Seite a und dem Winkel α ist, soll in einen gleichgrossen Cylinder verwandelt werden, dessen Axe gleich s ist und mit der Grundfläche den Winkel β bildet. Wie gross ist der Radius der Grundfläche des Cylinders?

43. Den Kubikinhalt eines Cylinders zu berechnen, dessen Axe gleich a ist und mit der Grundfläche den Winkel α bildet, wenn der Flächeninhalt des zur Grundfläche senkrechten Axenschnitts gleich f gegeben ist. $a = 16\frac{1}{4}$, $f = 45{,}081$, $\alpha = 69^0\ 18'\ 20''$.

44. Ein gerader Cylinder wird von einer Ebene, welche der Axe desselben parallel ist, durchschnitten, und der Abstand dieser Ebene von der Axe sei gleich d, der Halbmesser der Grundfläche gleich r und die Höhe des Cylinders gleich h. Wie gross ist der Inhalt des kleineren Stückes des Cylinders? $d = 239$, $r = 312$, $h = 2{,}3967$.

45. Den Kubikinhalt eines Cylinders zu berechnen, der einem dreiseitigen Prisma umbeschrieben ist, wenn der Kubikinhalt V des Prismas und von seiner Grundfläche die Winkel gegeben sind. $V = 0{,}65959$, $\beta = 69^0\ 13'\ 12''$, $\gamma = 80^0\ 11'\ 28''$.

46. In einen Cylinder mit dem Radius r sei ein dreiseitiges Prisma construirt, dessen Grundfläche die Winkel α, β, γ hat, und zwar ist die gemeinschaftliche Höhe beider Körper die vierte geometrische Proportionale zu den Seiten a, b, c der Grundfläche. Wie gross ist der Cylinder und wie gross das Prisma? $r = 24{,}35$, $\alpha = 55^0\ 56'$, $\beta = 44^0\ 45'$.

47. Der Kubikinhalt eines Cylinders sei gleich V; wie gross ist der Inhalt eines Prismas von derselben Höhe, dessen Grundfläche ein dem Grundkreis des Cylinders einbeschriebenes regelmässiges n-Eck ist? $V = 79{,}91$, $n = 24$.

48. Von einem geraden Cylinder ist der Radius der Grundfläche gleich r, die Höhe gleich h gegeben. Man soll den Cylinder durch eine Ebene, welche die Peripherie seiner Grundfläche in einem Punkte trifft, so schneiden, dass die Theile des Cylinders sich wie $p : q$ verhalten. Welchen Neigungswinkel muss die Schnittfläche mit der Grundfläche bilden? $r = 3{,}5$, $h = 8{,}4$, $p : q = 7 : 5$.

49. Ein a Meter langer Keller soll durch ein cylindrisches Gewölbe überdeckt werden, dessen Stirnfläche von zwei ähnlichen Bogen concentrischer Kreise begrenzt wird. Die Sehne des kleineren Bogens ist gleich b, seine Höhe gleich c und die Dicke der Wandung des Gewölbes gleich d Meter. Welchen kubischen Inhalt hat das ganze Gewölbe? $a = 11{,}3$, $b = 2$, $c = 0{,}26795$, $d = 2$.

§. 24. Der Kegel.

1. Den Kubikinhalt V eines Kegels aus dem Radius r der Grundfläche und der Höhe h zu berechnen für α) $r = 5$, $h = 9$; β) $r = 1{,}3$, $h = 0{,}9$; γ) $r = 271$, $h = 33$. Für sich. Einfache Aufg.

2. Ebenso r aus V und h. $V = 1065$, $h = 113$.

3. Ebenso h aus V und r. $V = 8{,}52$, $r = 0{,}6$.

4. Die Grundfläche eines kegelförmigen Zuckerhutes von $21{,}3^{cm}$ Höhe hat 72^{cm} Umfang. Wieviel kostet derselbe, wenn der Zucker $1\frac{1}{2}$mal so schwer als Wasser ist und 1 Kgr. Zucker 110 Pf. kostet?

5. Den Kubikinhalt V eines geraden Kegels aus dem Radius r der Grundfläche und der Seitenlinie s zu berechnen. α) $s = 37$, $r = 35$; β) $s = 4{,}25$, $r = 3{,}04$; γ) $s = 4{,}297974$, $r = 3{,}5$.

6. Ebenso V aus h und s. $h = 2{,}14$, $s = 17{,}8028$.

7. Ebenso s aus V und r. $V = 108{,}24$, $r = 4{,}07$.

8. Den Kubikinhalt V eines geraden Kegels aus seinem Mantel M und dem Radius r seiner Grundfläche zu berechnen. α) $M = 317\,\square^{m}$, $r = 9^{m},90149$; β) $M = 1{,}69$, $r = 0{,}61546$.

9. Ebenso V aus M und s. $M = 1570{,}797$, $s = 25$.

10. Ebenso V aus M und h. $M = 160{,}404$, $h = 1{,}76$.

11. Ebenso M aus V und r. $V = 101{,}921$, $r = 1{,}65452$.

12. Ebenso M aus V und h. $V = 96{,}068$, $h = 6{,}928$.

13. Man berechne den Kubikinhalt V eines geraden Kegels aus seiner Gesammt-Oberfläche O und dem Radius r der Grundfläche. $O = 15{,}2376$, $r = 1{,}50286$.

14. Ebenso V aus O und s. $O = 2808{,}6$, $s = 36$.

15. Ebenso V aus O und h. $O = 146{,}363$, $h = 6{,}8256$.

16. Ebenso O aus V und h. $V = 4800$, $h = 16{,}519$.

17. Man berechne den Kubikinhalt eines gleichseitigen Kegels aus dem Radius r der Grundfläche. $r = 12{,}4497$. Zusammengesetzte Aufg.

18. Das Volumen eines geraden Kegels aus dem Inhalt F

eines Axenschnitts und dem Inhalt f der Grundfläche zu berechnen. $F = 22{,}2245$, $f = 14{,}5$.

19. Wieviel Kubikmeter Inhalt hat ein Kegel, dessen Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck von a Quadratmeter Flächeninhalt ist? $a = 10{,}2207$.

20. In einen Kreis vom Radius r sei ein gleichseitiges Dreieck beschrieben. Wird der Kreis um den auf einer Seite senkrechten Durchmesser gedreht, so beschreibt das Dreieck einen Kegel. Wie gross sind Inhalt und Oberfläche desselben?

21. Wie tief wird ein gerader Kegel, welcher, die Spitze lothrecht nach abwärts gerichtet, in Wasser schwimmt, einsinken, wenn seine Höhe gleich h und das specifische Gewicht des Stoffes, aus dem er besteht, gleich 0,729 ist?

22. Von einem geraden Kegel sei die Seitenlinie gleich s, die Differenz der Höhe und des Radius der Grundfläche gleich d gegeben. Wie gross ist der Radius des Grundkreises, der Mantel und der Rauminhalt des Kegels? $s = 89$, $d = 41$.

23. Von einem geraden Kegel sei der Kubikinhalt K und die Summe der Seitenlinie und der Höhe $s + h = \sigma$ gegeben; man berechne die Seitenlinie, die Höhe, den Radius der Grundfläche, den Mantel und die gesammte Oberfläche des Kegels. $K = 132{,}7$; $\sigma = 12{,}8$.

24. Es sei eine Ebene und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben, dessen Abstand von der Ebene gleich h ist. Dieser Punkt soll die Spitze eines geraden Kegels werden, dessen Grundfläche in der Ebene liegt, und dessen Seitenlinie sich zur Höhe wie $m : n$ verhalte. Man berechne den Mantel und das Volumen des Kegels.

25. Wie verhalten sich die Mäntel und wie die Volumina zweier Kegel zu einander, welche entstehen, wenn ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten a und b das eine Mal um die Kathete a, das andere Mal um die Kathete b rotirt?

26. Ein rechtwinkeliges Dreieck rotire je einmal um jede seiner drei Seiten; wie verhalten sich die durch die Rotation entstehenden Kegel (Doppelkegel) zu einander, wenn eine Kathete gleich 4 und ihr Gegenwinkel gleich 30^0 ist?

Verbindung mit dem geg. Mantel.

27. Die Dimensionen eines geraden Kegels aus seinem Volumen V und dem Flächeninhalt M seines Mantels zu berechnen. (Cubische Gleichung.) $V = 4{,}7124$; $M = 11{,}7810$.

28. Wieviel beträgt das Volumen eines geraden Kegels, dessen Seitenlinie $n$mal so gross als der Radius der Grundfläche und dessen Mantel gleich M ist?

29. Der Kubikinhalt eines geraden Kegels, dessen Mantel $n = 2$mal so gross ist als seine Grundfläche, beträgt $V = 1{,}8138$ Kubikcentimeter. Wie gross ist sein Radius, seine Höhe und seine Seitenlinie?

30. Bei einem geraden Kegel von $h = 24^{cm}$ Höhe verhalte sich die Grundfläche zur Mantelfläche wie $m : n = 7 : 25$. Welchen körperlichen Inhalt hat dieser Kegel?

31. Es sei ein gerader Kegel gegeben, dessen Grundfläche in der Mantelfläche viermal enthalten ist. Er wird in einen Kegel mit doppelt so grosser Gesammtoberfläche verwandelt. Wie oft ist die Grundfläche des letzteren in seiner Mantelfläche enthalten?

32. Die Anzahl der Quadratmeter der Mantelfläche eines geraden Kegels sei gleich der Anzahl der Kubikmeter seines Volumens. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Masszahlen des Radius seiner Grundfläche und seiner Höhe?

33. Der in eine Ebene aufgerollte Mantel eines Kegels liefere einen Sector, dessen Radius gleich a und dessen Centriwinkel gleich 90^0 ist. Man berechne das Volumen des Kegels. $a = 32{,}867$. Der Mantel aufgerollt.

34. Die Grundfläche eines geraden Kegels habe den Flächeninhalt F, und der in eine Ebene aufgerollte Mantel desselben habe die Gestalt eines Sextanten. Man berechne das Volumen des Kegels. $F = 20{,}065$.

35. Das Volumen eines geraden Kegels, dessen in eine Ebene aufgerollte Mantelfläche einen Sector mit einem Centriwinkel von 36 Grad bildet, sei gleich V. Wie gross ist der Durchmesser der Grundfläche? $V = 144040$.

36. Wie gross ist der Centriwinkel desjenigen Sectors, welcher durch Zusammenrollen den Mantel eines geraden Kegels von V Kubikmeter Inhalt und der Höhe h^m liefert? $V = 129{,}88$, $h = 19{,}84314$.

37. Wie gross ist der Centriwinkel des Kreissectors, welcher durch Zusammenrollen den Mantel eines geraden Kegels liefert, dessen Volumen für $\pi = 3{,}14$ genau 314 Kubikmeter beträgt, wenn der Radius der Grundfläche dieses Kegels 5 Meter misst?

38. Aus einem Kegel von K Kubikmeter Inhalt, dessen Hohlkegel.

Höhe sich zu dem Radius des Grundkreises wie $p : q$ verhält, ist ein Kegel, welcher dieselbe Axe und bezüglich parallele Seitenlinien hat, herausgenommen. Wenn nun die Breite des in der Grundfläche entstandenen Kreisrings b Meter misst, wie gross ist dann der Rauminhalt des Hohlkegels? $K = 125$; $p : q = 3 : 8$; $b = 5{,}46225$.

39. Aus einem geraden Kegel sei durch eine Kegelfläche, deren Seitenlinien den homologen des ersteren parallel sind, ein Kegel herausgeschnitten; wie gross sind die Radien der Grundfläche des Hohlkegels, wenn sein Volumen gleich V, die Breite der ringförmigen Grundfläche gleich d und die Neigung der Seitenlinien gegen die Grundfläche 60^0 ist? $V = 67{,}11$, $d = 1$.

Mit Cylinder od. Kegel.

40. Wie verhält sich der Kubikinhalt eines gleichseitigen Cylinders zu dem eines gleichseitigen Kegels, wenn beide Körper gleiche Oberflächen haben?

41. Wie verhalten sich die Oberflächen der in 40 genannten Körper zu einander bei gleichem Volumen?

42. Das Volumen eines geraden Kegels werde durch eine gerade Kegelfläche, welche dieselbe Axe und den Mittelpunkt der Grundfläche des ersteren zur Spitze hat, halbirt. Wie gross ist der Radius des Schnittkreises, und in welchem Verhältniss theilt dieselbe Kegelfläche den Mantel des ersteren?

43. Aus einem geraden Cylinder seien zwei Kegel herausgeschnitten, deren Grundflächen bezüglich diejenigen des Cylinders sind, und deren gemeinschaftliche Spitze ein beliebiger Punkt der Cylinderaxe ist. Der übrig gebliebene Körper soll durch eine zweite gerade Cylinderfläche, welche mit der ersten dieselbe Axe hat, halbirt werden. Wie gross wird der Radius der letzteren sein?

44. Ein gerader Kegel mit dem Radius r und der Höhe h soll parallel mit der Grundfläche abgestumpft, und aus dem Kegelstumpf soll ein zweiter Kegel ausgeschnitten werden, dessen Grundfläche die Schnittfläche und dessen Spitze der Mittelpunkt der Grundfläche des gegebenen Kegels ist. In welchem Abstand von der Spitze ist der Schnitt zu legen, wenn der ausgehöhlte Kegelstumpf so gross sein soll, als der abgeschnittene Kegel? (Cubische Gleichung.)

45. Ein gerader Kegel sei durch einen geraden Cylinder von halb so grosser Höhe, dessen Axe in der des Kegels liegt, ausgehöhlt. Der Radius der Kegelbasis sei $r = 3$, der des Cylin-

ders $\varrho = 1$, die Seitenlinie des Kegels $s = 5$. Man berechne das Volumen und die gesammte Oberfläche des ausgehöhlten Körpers.

46. In welchem Abstand von der Spitze muss ein Kegel parallel der Grundfläche durchschnitten werden, damit ein aus dem entstehenden Kegelstumpf herausgeschnittener Cylinder, dessen obere Grundfläche die Schnittfläche und dessen Höhe gleich der Höhe des Stumpfes ist, so gross als der abgeschnittene Ergänzungskegel sei?

47. In einen geraden Kegelstumpf sind zwei Kegel einbeschrieben, deren Grundflächen bezüglich die Grund- und die Deckfläche des ersteren, und deren Spitzen die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kreise sind. Man berechne die Oberfläche und das Volumen des beiden Kegeln gemeinsamen Stücks aus den Dimensionen des Stumpfs.

Mit Pyramide.

48. Der Inhalt eines gleichseitigen Kegels sei gleich a; man soll den Inhalt und die Oberfläche der demselben umbeschriebenen regelmässig-dreiseitigen Pyramide berechnen.

49. Der Rauminhalt einer geraden, regelmässig-dreiseitigen Pyramide sei gleich K gegeben; wie gross ist der Rauminhalt des ihr einbeschriebenen Kegels? $K = 913$.

50. Ein Kegel von der Höhe h sei einer vierseitigen Pyramide umbeschrieben, deren Grundfläche ein Sehnenviereck mit den Seiten a, b, c, d ist; wie gross ist sein Volumen? $h = 3{,}18308$; $a = 8{,}65$, $b = 3{,}85$, $c = 6{,}85$, $d = 3{,}35$.

Mit regelm. Polyeder.

51. Man berechne den Kubikinhalt des einem regelmässigen Tetraëder mit der Kante a umbeschriebenen, sowie den Kubikinhalt des demselben einbeschriebenen Kegels und bestimme das Verhältniss beider Körper zu einander.

52. In welchem Verhältniss steht die Gesammt-Oberfläche eines gleichseitigen Kegels zu der Oberfläche eines Würfels von gleichem Volumen?

53. Auf jeder Grundfläche eines geraden Cylinders sei ein Kegel construirt, dessen Spitze der Mittelpunkt der anderen Grundfläche ist. Beide Kegel durchdringen sich dann so, dass sie einen Doppelkegel gemeinsam haben, während ihre Mäntel einen aus zwei abgestumpften Kegeln bestehenden Körper begrenzen. Wie verhalten sich die Volumina des Doppelkegels und dieses Körpers zu einander und zu demjenigen des Cylinders? Wie verhalten sich ferner die krummen Oberflächen der beiden ersteren Körper zu

einander, und für welche Verhältnisse des Cylinderradius zur Höhe werden dieselben einzeln dem Cylindermantel gleich?

Mit Kugel. 54. Um und in eine Kugel sei ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich die Volumina derselben zu einander?

55. Der Radius der Erde sei gleich r. Welches ist der Inhalt und welches die Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Grundfläche der Parallelkreis von 30^0 nördlicher Breite, und dessen Scheitel der Nordpol ist? $r = 859{,}44$ geogr. M.

56. Wieviel beträgt der Kubikinhalt eines auf einem Grundkreise mit dem Radius r stehenden geraden Kegels, wenn die ihm einbeschriebene Kugel den Radius R hat? $r = 3{,}18835$, $R = 2{,}25450$.

57. Eine Kugel sei in einem Abstand vom Mittelpunkt, der $\frac{m}{n}$ des Radius beträgt, durch eine Ebene in zwei Segmente getheilt worden. Im grösseren Segment wird über der Ebene als Grundfläche ein gerader Kegel construirt, dessen Spitze auf der Oberfläche der Kugel liegt, und dessen Rauminhalt gleich K ist. Wie gross ist der Halbmesser der Kugel und wie gross der Halbmesser der Schnittfläche? $K = 66\frac{2}{3}$, $m : n = 2 : 3$.

58. Den Mantel und das Volumen eines Kegels zu berechnen, welcher zwei Kugeln umbeschrieben ist, und dessen Grundfläche auf der Centrallinie der letzteren senkrecht steht und die grössere Kugel berührt. Gegeben seien die Kugelradien und die Centrallinie.

Theilung d. Kegels. 59. Durch die Spitze eines Kegels und eine dem Radius gleiche Sehne der Grundfläche sei eine Ebene gelegt; in welchem Verhältniss stehen die Volumina der so gebildeten Theile des Kegels zu einander?

β 60. Den Kubikinhalt eines geraden Kegels aus dem Radius r der Grundfläche und dem Winkel α an der Spitze eines Axenschnitts zu berechnen. $r = 6{,}09$, $\alpha = 110^0\,12'\,8'',8$.

61. Ebenso aus der Seitenlinie s und dem Neigungswinkel β derselben gegen die Grundfläche. $s = 11{,}6554$; $\beta = 34^0\,39'\,20''$.

62. Den Kubikinhalt eines schiefen Kegels aus der längsten Seitenlinie S, der kürzesten s und dem Radius r der Grundfläche zu berechnen. (Kann auch ohne trigonometrische Functionen gelöst werden.) α) $S = 58$, $s = 41$, $r = 25{,}5$; β) $S = 1\frac{1}{2}$, $s = 1\frac{9}{20}$, $r = \frac{1}{8}$.

63. Ebenso aus den Seitenlinien S, s und der Axe a. $S=15$, $s=13$, $a=12{,}16552$.

64. Wie gross ist der Mantel eines geraden Kegels, dessen Seitenlinien gegen die Grundfläche unter dem Winkel α geneigt sind, wenn der Inhalt des Kegels gleich V ist? $\alpha=67^0\,5'\,18''$, $V=179{,}044$.

65. Ein gerader Kegel sei aus einem Stoffe angefertigt, dessen specifisches Gewicht 2,37 betrage, und wiege 970 Kgr. Die Seitenlinie des Kegels bilde mit dessen Grundfläche den Winkel $67^0\,31'$. Man berechne den Mantel des Kegels.

66. Ueber derselben Grundfläche stehen zwei gerade Kegel, deren Spitzen die Entfernung a von einander haben. Wie gross ist der von den Kegelmänteln eingeschlossene Raum, wenn der Winkel an der Spitze eines Axenschnitts in dem höheren Kegel gleich α, in dem anderen gleich β ist? $\alpha=53^0\,7'\,46''$, $\beta=90^0$, $a=3{,}25154$.

67. Aus einem geraden Kegel, dessen Grundfläche den Durchmesser d hat, ist durch eine Kegelfläche, deren Seitenlinien den homologen des ersteren parallel sind, ein Kegel herausgeschnitten worden. Welches Volumen hat der Hohlkegel, wenn die Seitenlinien gegen die Grundfläche unter dem Winkel α geneigt sind, und der senkrechte Abstand der Mantelflächen gleich p ist? $d=14$, $\alpha=49^0\,8'\,57'',6$, $p=1{,}51286$.

68. Ein gerader Kegel habe an der Spitze eines Axenschnitts den Winkel α, und die Peripherie seines Grundkreises sei gleich p. Man berechne die Höhe, die Seitenlinie, den Mantel und das Volumen des Kegels. $\alpha=165^0\,4'\,28'',2$, $p=56{,}549$.

69. Von einem schiefen Kegel sei die Axe gleich a, der Winkel derselben mit der grössten Seitenlinie gleich α, der Winkel zwischen der Axe und der kleinsten Seitenlinie gleich β gegeben; man berechne das Volumen des Kegels. $a=4{,}9999$, $\alpha=25^0\,38'$, $\beta=47^0\,16'$.

70. Ebenso, wenn statt der Axe die grösste Seitenlinie gegeben ist. $S=12$, $\alpha=20^0\,0'$, $\beta=44^0\,4'$.

71. Das Volumen eines schiefen Kegels zu berechnen, wenn die grösste Seitenlinie gleich S, der Winkel zwischen ihr und der kleinsten Seitenlinie gleich φ gegeben ist, und dem Grundkreis ein Dreieck einbeschrieben werden kann, in welchem eine

Seite gleich a und der ihr gegenüberliegende Winkel gleich α ist. $a = 6$, $S = 5$, $\alpha = 50^0$, $\varphi = 70^0$.

72. Das Volumen einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche sei gleich V, der Neigungswinkel ihrer Seitenkanten gegen die Grundfläche gleich α; wie gross sind diese Kanten, und wie gross ist der Unterschied der Volumina des um- und des in die Pyramide beschriebenen Kegels? $V = 120{,}842$, $\alpha = 58^0\ 10'\ 10''$.

73. Einem geraden Kegel sei eine dreiseitige Pyramide umbeschrieben, deren Grundfläche ein gleichschenkeliges Dreieck mit gegebenem Basiswinkel α ist; das Volumen der Pyramide sei bekannt. Wie gross ist das Volumen des Kegels? $\alpha = 68^0\ 20'$, $V = 695{,}67$.

74. Eine dreiseitige Pyramide habe die Grundkanten a, b, c; eine Seitenkante derselben sei gleich d und gegen die Grundfläche unter dem Winkel δ geneigt. Wie gross ist das Volumen des ihr einbeschriebenen Berührungskegels? $a = 101$, $b = 29$, $c = 78$, $d = 145{,}1954$, $\delta = 69^0\ 17'\ 20''{,}1$.

75. Das Volumen eines schiefen Kegels zu bestimmen, wenn die Höhe desselben gleich h, der Neigungswinkel seiner Axe gegen die Grundfläche gleich α und der Winkel an der Spitze eines zum Normalschnitt senkrecht gelegten Axenschnitts gleich β gegeben ist. $h = 3$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 36^0\ 5'\ 4''{,}2$.

76. Das Volumen eines schiefen Kegels aus dem Winkel α an der Spitze in dem zur Grundfläche senkrechten Axenschnitt, der diesen Winkel halbirenden Transversale t und dem Durchmesser $2r$ der Grundfläche zu berechnen.

77. Die Axe eines Cylinders bilde mit der Grundfläche den Neigungswinkel α, seine Höhe sei gleich der Peripherie seiner Grundfläche, und sein Volumen gleich dem eines Kegels, dessen Höhe gleich der Axe des Cylinders, und dessen Radius gleich R ist. Wie lang ist die Axe? $\alpha = 68^0\ 34'\ 36''$, $R = 8$.

78. Aus einem rechteckigen Blatt Papier kann auf zwei verschiedene Arten ein Sector herausgeschnitten werden, dessen Radius gleich einer der Seiten, dessen Mittelpunkt der Halbirungspunkt einer anliegenden Seite ist, und dessen Bogen in den Rändern des Blattes endigt. Wie verhalten sich die Volumina der beiden geraden Kegel und der geraden Cylinder zu einander, deren Mäntel bezüglich mit jenen Sectoren und dem vollständigen

Blatt genau passend überkleidet werden könnten, wenn sich die Seiten des Rechtecks wie $a : b = 5 : 3$ verhalten?

§. 25. Der abgestumpfte Kegel.

Für sich. Einfache Aufg.

1. Den Kubikinhalt V eines abgestumpften Kegels aus den Radien R, r der Endflächen und der Höhe h zu berechnen für α) $R = 12$, $r = 7$, $h = 1{,}7237$; β) $R = 0{,}932$, $r = 0{,}091$, $h = 0{,}019859$.

2. Ebenso r aus V, R, h. $V = 1021$, $R = 5$, $h = 25$.

3. Ebenso h aus V, R, r. $V = 968{,}66$, $R = 2$, $r = 1{,}5$.

4. Den Kubikinhalt eines abgestumpften geraden Kegels aus den Radien R, r der Endflächen und der Seitenlinie s zu berechnen. $s = 65$, $R = 54$, $r = 21$.

Zusammenges. Aufg.

5. Den Kubikinhalt eines abgestumpften geraden Kegels aus seinem Mantel M, der Höhe h und der Seitenlinie s zu berechnen. $M = 133{,}675$ □^{de}, $h = 1{,}2^{de}$, $s = 3{,}7^{de}$.

6. Den Kubikinhalt eines geraden abgestumpften Kegels aus seinem Mantel M, seiner Seitenlinie s und dem Verhältniss der beiden Radien $R : r = p : q$ zu berechnen. $M = 140$, $s = 2{,}821$, $p : q = 4 : 3$.

7. Aus dem Kubikinhalt V, der Höhe h und dem Verhältniss $m : n$ der Radien der Endflächen eines abgestumpften Kegels diese Radien zu berechnen. α) $m : n = 3 : 1$, $h = 11{,}3$, $V = 5538$; β) $m : n = 3 : 2$, $h = 19$, $V = 1512{,}14$.

8. Ebenso, wenn statt des Verhältnisses die Differenz d der Radien gegeben ist. $V = 355$, $h = 3\frac{12}{109}$, $d = 2$.

9. Von einem abgestumpften geraden Kegel sei das Volumen gleich V, die Differenz der Radien gleich a und die Differenz der Seitenlinie und der Höhe gleich b gegeben; man berechne seine Dimensionen. $V = 11683000$, $a = 23$, $b = 1$.

10. Von einem abgestumpften schiefen Kegel seien die grösste Seitenlinie S, die kleinste s und die Radien R, r der Endflächen gegeben. Man berechne den Kubikinhalt desselben. α) $S = 101$, $s = 29$, $R = 65$, $r = 5$; β) $S = 427$, $s = 421$, $R = 78$, $r = 25$; γ) $S = 1{,}745$, $s = 1{,}590$, $R = 1{,}3625$, $r = 0{,}91$.

11. Aus dem Volumen V eines abgestumpften schiefen Kegels, der grössten Seitenlinie S, der kleinsten s und der Differenz der Radien $R - r = d$ diese letzteren selbst zu berechnen. $V = 8{,}8404$, $S = 1{,}7$, $s = 1$, $d = 0{,}45$.

12. Man kennt den Rauminhalt V eines geraden Kegelstumpfs, seine Höhe h und die Entfernung e des Schwerpunkts des erzeugenden Trapezes von seiner grösseren parallelen Seite. Wie gross sind die Radien der Endflächen des Stumpfes? $V = 1724{,}72$, $h = 27$, $e = 13$.

13. Den Rauminhalt eines abgestumpften Kegels aus dem Inhalt g der kleineren Grundfläche, dem Verhältniss derselben zur grösseren gleich $1 : n$ und der Bedingung zu berechnen, dass der Mittelpunkt der grösseren von jedem Punkte der Peripherie der kleineren eine Entfernung habe, welche dem Durchmesser der kleineren gleich sei. $g = 45{,}508$ □^{dc}, $n = 4$.

14. Ein gleichseitiger Kegel wird durch eine der Grundfläche parallele Ebene so durchschnitten, dass der an der Spitze liegende Theil der Mantelfläche sich zu dem unteren wie 1 : 2 verhält. Wie gross ist die Mantelfläche des abgestumpften Kegels, in welchem Verhältniss steht dieselbe zu der Summe der beiden Grundflächen, und wie gross ist das Volumen des Kegelstumpfs? Gegeben: der Durchmesser der Grundfläche.

15. Ein gerader abgestumpfter Kegel, dessen Endflächen die Radien $R = 25^{cm}$, $r = 20^{cm}$ haben, fasst $V = 5296{,}62$ Kubikdecimeter. Welche Gestalt hat der abgewickelte Mantel?

Theilung des Stumpfs.

16. Ein abgestumpfter Kegel, dessen Grundflächen die Radien $R = 10^{dc}$ und $r = 5^{dc}$ haben, und dessen Höhe $h = 12^{dc}$ beträgt, soll durch eine mit den Grundflächen parallele Ebene halbirt werden. Wie gross ist der Radius der Durchschnittsfläche, und wieweit steht dieselbe von der oberen Grundfläche ab?

Mit Prisma.

17. Es soll ein Brunnen, dessen quadratischer Querschnitt eine Seite gleich a habe, bis zur Tiefe h ausgeschachtet werden. Zur Förderung des Erdreichs bedient man sich eines Eimers, welcher die Gestalt eines abgestumpften Kegels hat; sein grösserer Durchmesser ist im Lichten gleich D, der kleinere gleich d, die Seitenkante gleich s. Wie oft muss der Eimer gefüllt werden, wenn dabei zu berücksichtigen ist, dass p Volumeinheiten festen Erdreichs q Einheiten aufgelockerten geben? $a = 1^m$, $h = 1^m{,}42$, $D = 3^{dc}{,}2$, $d = 1^{dc}{,}4$, $s = 4^{dc}{,}1$, $p = 11{,}3$, $q = 13{,}9$.

18. Aus einem kegelförmigen Holzstamm, der $a = 2^m{,}5$ hoch ist und an dem dickeren Ende einen Umfang $U = 0^m{,}9$, an dem schwächeren einen Umfang $u = 0^m{,}6$ hat, soll ein prismatischer Balken gehauen werden, dessen Grundfläche ein der

kleineren Endfläche einbeschriebenes Quadrat ist. Wieviel beträgt der Rauminhalt des Holz-Abfalls?

Mit Pyramide.

19. Wieviel ist die aus einem geraden abgestumpften Kegel mit den Radien $R = 1^m,8$ und $r = 1^m,2$ und der Höhe $h = 12^m$ herausgeschnittene abgestumpfte vierseitige Pyramide vom grössten Inhalt kleiner als der abgestumpfte Kegel?

20. Durch ein regelmässiges Tetraëder sei parallel zu der Grundfläche eine Ebene gelegt, welche die Höhe halbirt, und in die Schnittfigur, sowie auch in die Grundfläche, sei der innere Berührungskreis gezeichnet. Wie gross ist der abgestumpfte Kegel, welcher diese beiden Kreise zu Grundflächen hat, wenn die Kante des Tetraëders gleich a gegeben ist?

21. Um und in einen geraden Kegelstumpf, dessen Volumen gleich V bekannt ist, sei je eine abgestumpfte gerade Pyramide beschrieben, so dass die Endflächen der beiden Pyramiden um, bezw. in die Endflächen des Kegelstumpfs beschriebene regelmässige Sechsecke sind. Wieviel beträgt der Unterschied der Volumina der beiden Pyramiden? $V = 72551,7$.

22. Das Volumen einer regelmässig-vierseitigen geraden abgestumpften Pyramide sei gleich V. Wieviel beträgt der Unterschied der Volumina zweier abgestumpften Kegel, von denen der eine der Pyramide umbeschrieben und der andere ihr einbeschrieben ist? $V = 90,4$.

Mit Cylinder.

23. Wieviel beträgt der Fehler, welchen man begeht, wenn man bei der Berechnung des Volumens eines Baumstammes von der Gestalt eines abgestumpften Kegels denselben als einen gleichhohen Cylinder ansieht, dessen Grundflächen-Radius das arithmetische Mittel zwischen den Radien der beiden Endflächen ist?

24. Ein gerader Kegelstumpf, dessen Seitenlinie gleich s ist, dessen grössere Endfläche den Radius R und dessen kleinere den Radius r hat, sei von einem geraden Cylinder concentrisch durchbohrt, dessen Radius gleich x ist. Wie gross ist der ausgehöhlte Körper? $s = 12,01$, $R = 5,62$, $r = 5,13$, $x = 5,00908$.

25. Ein gerader Kegelstumpf sei 7 mal so gross, als der ihm einbeschriebene (auf dem kleineren Kreise stehende, gleichhohe) gerade Cylinder. Wie verhalten sich die Radien der beiden Grundkreise zu einander?

26. Eine cylindrische Röhre von Messing, die einen äusseren Durchmesser von $D = 13^{cm}$, einen inneren von $d = 5^{cm}$ und

eine Länge von $l = 18^{cm}$ hat, soll in einen abgestumpften Kegel umgegossen werden, dessen unterer Durchmesser $a = 10^{cm}$ und dessen oberer $b = 8^{cm}$ beträgt. Wie hoch wird derselbe werden?

27. In einen geraden Kegelstumpf, dessen Volumen V und Höhe h bekannt ist, soll ein zu den Grundflächen paralleler Schnitt so gelegt werden, dass der Mantel des geraden Cylinders, welcher den kleineren Grundkreis des Stumpfes zur Grundfläche und zur Höhe die Höhe des Stumpfes hat, gleich dem Mantel desjenigen geraden Cylinders ist, welcher die Schnittfläche zur Grundfläche und zur Höhe die Entfernung der Schnittfläche vom grösseren Grundkreis des Stumpfes hat. Wie gross ist diese Entfernung, wenn die Differenz der Radien der Grundflächen des Stumpfes gleich d ist? $V = 1960{,}354$, $h = 12$, $d = 6$.

28. Aus einem Cylinder, dessen Radius und Höhe gegeben sind, soll ein gerader Kegelstumpf von gleicher Höhe herausgenommen werden, dessen untere Grundfläche diejenige des Cylinders, und dessen obere Grundfläche halb so gross als die des Cylinders ist. Man berechne das Volumen des zurückbleibenden Körpers.

29. Aus einem Cylinder, dessen Höhe gleich h ist, und dessen Grundfläche einen Radius gleich r hat, ist ein abgestumpfter Kegel herausgenommen, der mit dem Cylinder die Höhe und die Grundfläche gemeinsam hat und die Hälfte des ganzen Cylinders beträgt; es soll der Radius der oberen Endfläche desselben berechnet werden. $r = 2{,}73204$.

30. Ein gerader Cylinder habe den Radius r und die Höhe h. Wie gross ist der Radius der oberen Grundfläche eines gleichgrossen abgestumpften geraden Kegels von der doppelten Höhe, dessen untere Grundfläche gleich der des Cylinders ist, und wie gross ist der Mantel dieses abgestumpften Kegels? $r = 13{,}6602$, $h = 5$.

31. Auf einem abgestumpften geraden Kegel, dessen untere Grundfläche den Durchmesser von a^{cm} hat, steht ein gerader Cylinder, dessen Grundfläche die obere Endfläche des Kegelstumpfs ist, und der mit diesem gleiches Volumen hat. Die Höhe des Kegelstumpfs ist gleich h^{cm}, die des Cylinders gleich p^{cm}. Die krumme Oberfläche des Gesammt-Körpers soll vergoldet werden. Wie theuer ist die Vergoldung, wenn der Quadratcentimeter mit n Pf. berechnet wird?

32. In einem Trapez $ABCD$, dessen parallele Seiten $AB = a$,

$CD = b$ sind, und dessen Höhe gleich c ist, sei die Seite AD in G halbirt, und durch G sei die Transversale GH parallel zu AB gezogen. Ferner seien GJ und HK senkrecht auf AB construirt. Man soll den Inhalt des Rotationskörpers bestimmen, welcher entsteht, wenn das Sechseck $GJKHCD$ um JK rotirt. $a = 120$, $b = 85$, $c = 38{,}3536$.

33. Auf der kleineren Grundfläche eines abgestumpften geraden Kegels, deren Radius gleich r ist, sei ein Cylinder errichtet, dessen Höhe gleich der Höhe des Kegelstumpfes ist. Wie gross ist der Radius der grösseren Grundfläche, wenn das Volumen des Cylinders $\frac{m}{n}$ des Volumens des Kegelstumpfs beträgt? $r = 4$, $m : n = 3 : 52$. Wie verhalten sich die Radien der beiden Grundflächen zu einander für $m : n = 1 : 7$?

34. Aus einem 3^m hohen Baumstamme von der Gestalt eines abgestumpften geraden Kegels, welcher am oberen Ende einen Durchmesser von 2^{dc}, am unteren einen solchen von 3^{dc} hat, soll ein cylindrisches Brunnenrohr gehauen, und dieses soll in der Mitte so durchbohrt werden, dass das Bohrloch $\frac{3}{8}^{dc}$ Durchmesser erhält. Wieviel Kubikmeter Holz gehen durch das Abhauen und Ausbohren verloren, wenn der äussere Durchmesser des Rohres gleich dem Durchmesser des Stammes an dessen dünnerem Ende ist?

35. In einem geraden Kegelstumpfe sei die Differenz der beiden Grundflächen gleich $\frac{3}{5}$ des Mantels, die Differenz der Seitenlinie und der Höhe gleich 4^{cm}, der Inhalt gleich dem eines Kegels, welcher die Höhe des Stumpfes zum Radius und die um 1^{cm} vergrösserte Seitenlinie zur Höhe hat. Wie gross sind die Radien? Mit Kegel.

36. Durch die beiden Grundkreise eines abgestumpften geraden Kegels werden ausser diesem zwei einander ähnliche Kegel begrenzt, die ihre gemeinschaftliche Spitze auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte haben. Man berechne aus den beiden Radien das Verhältniss des Rauminhalts des Kegelstumpfs zur Summe der Rauminhalte der beiden Kegel. $R = 5$, $r = 4$.

37. Das Volumen eines geraden Kegelstumpfs zu berechnen, welcher einer Kugel mit dem Radius r umbeschrieben, und dessen kleinere Grundfläche gleich der Hälfte der grösseren ist. $r = 5{,}34813$. Mit Kugel.

38. Von vier gleichgrossen Kugeln, deren Radien gleich

r sind, berührt jede die drei übrigen. Alle vier werden von der Mantelfläche eines abgestumpften Kegels berührt, dessen eine Endfläche drei der Kugeln, und dessen andere Endfläche die vierte berührt. Man berechne den Mantel und das Volumen dieses Kegelstumpfs.

β 39. Man berechne den Kubikinhalt eines abgestumpften geraden Kegels aus dem Inhalt G seiner grösseren Grundfläche, dem Winkel α der Seitenlinien gegen diese und aus der Höhe h. $G = 5{,}09296$, $h = 1{,}5708$, $\alpha = 58^0\ 42'\ 12'',4$.

40. Das Volumen eines geraden Kegelstumpfes aus der Seitenlinie s, ihrem Neigungswinkel α gegen die grössere Grundfläche und dem Mantel M zu berechnen. $s = 10$, $\alpha = 60^0$, $M = 369{,}975$.

41. Das Volumen eines abgestumpften geraden Kegels sei gleich V, die Differenz der Radien der Grundflächen gleich d und der Neigungswinkel der Seitenlinien gegen die Grundflächen gleich α gegeben. Man soll die Radien der Grundflächen berechnen. $V = 544{,}54$, $d = 4$, $\alpha = 68^0\ 11'\ 54'',93$.

42. Aus dem Mantel M eines abgestumpften geraden Kegels, dem Neigungswinkel α seiner Seitenlinien gegen die grössere Grundfläche und dem Verhältniss $p^2 : q^2$ der beiden Grundflächen das Volumen desselben zu berechnen. $\alpha)$ $M = 161{,}748$, $\alpha = 69^0\ 8'\ 24''$, $p^2 : q^2 = 49 : 25$; $\beta)$ $M = 185{,}09$, $\alpha = 78^0\ 8'\ 40''$, $p^2 : q^2 = 9 : 4$.

43. Wie gross ist der Inhalt eines abgestumpften Kegels mit den Radien R, r der Grundflächen, wenn seine grösste und seine kleinste Seitenlinie mit der grösseren Grundfläche bezüglich die Neigungswinkel α und β bilden? $R = 11$, $r = 10$, $\alpha = 49^0\ 5'\ 20'',8$, $\beta = 90^0$.

44. Welchen Winkel bilden die Seitenlinien eines geraden abgestumpften Kegels mit der grösseren Grundfläche, wenn der Kubikinhalt desselben gleich K ist und die Peripherien seiner Grundflächen bezüglich gleich P und p sind? $K = 347{,}162$, $P = 50$, $p = 30$.

45. Ein Trapez, welches zwei rechte und einen spitzen Winkel, letzteren gleich α, und den Flächeninhalt F hat, rotire um die kleinere der nicht parallelen Seiten; die Länge der letzteren sei gleich c gegeben. Man berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. $\alpha = 37^0\ 30'$, $F = 187{,}782$, $c = 12$.

46. Aus einem geraden Kegel, dessen Axenschnitt an der Spitze einen Winkel gleich α hat, soll durch zwei zu der Axe senkrechte Ebenen ein gerader Kegelstumpf von gegebenem Volumen V herausgeschnitten werden. Kann man verlangen, dass die Höhe desselben gleich dem Abstand der kleineren Schnittfläche von der Spitze sei, und wie gross ist dann dieser Abstand? $\alpha = 138^0\ 5'\ 47'',2$, $V = 50$.

47. Aus einem geraden Kegel, dessen Axenschnitt an der Spitze einen Winkel gleich α hat, seien zwei abgestumpfte gerade Kegel von gleicher Höhe so herausgeschnitten, dass sich die Abstände ihrer kleineren Endflächen von der Spitze wie $m : n$ verhalten. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Kegelstumpfe zu einander, wenn ausserdem der Radius des der Spitze am nächsten liegenden Schnitts gleich dem dritten Theil jener Höhe ist? $m : n = 1 : 3$, $\alpha = 90^0$.

§. 26. Die Kugel.

1. Den Kubikinhalt einer Kugel aus ihrem Radius r zu berechnen für α) $r = 7{,}816$, β) $r = 12{,}2233$, γ) 859,5 Meilen. *α Für sich. Einf. Aufg.*

2. Den Radius einer Kugel aus ihrem Kubikinhalt V zu berechnen. $V = \alpha$) 523,6, β) 904,78, γ) 1436,77.

3. Den Kubikinhalt einer Kugel aus ihrer Oberfläche O zu berechnen. $O = 0{,}50274$; 2,0107; 314,16.

4. Umgekehrt, O aus V zu berechnen. $V = 1229{,}44$.

5. Es soll eine Kugel construirt werden, welche so gross ist, als zwei gegebene Kugeln mit den Radien r_1, r_2 zusammen. Wie gross ist der Radius derselben zu machen? $r_1 = 1{,}6004$, $r_2 = 4{,}9447$.

6. Wie gross ist die Oberfläche einer Kugel, welche an Kubikinhalt gleich der Summe zweier Kugeln mit den Oberflächen O_1 und O_2 ist? $O_1 = 13{,}7525$, $O_2 = 30{,}0829$.

7. Den Kubikinhalt einer Kugel zu berechnen, in welcher ein Schnittkreis, dessen Abstand vom Mittelpunkt gleich a ist, den Umfang u hat. $a = 3{,}3$, $u = 56{,}259$.

8. Wieviel wiegt eine Büchsenkugel, deren Durchmesser gleich $6{,}4^{cm}$ ist, wenn das specifische Gewicht des Bleis 11,33 ist? *Gewicht.*

9. Wie gross ist der innere Durchmesser des glatten Laufes einer Kanone, deren kugelförmiges eisernes Vollgeschoss 3 Kilogramm wiegt? Specifisches Gewicht des Eisens $s = 7{,}207$.

10. Der Durchmesser der Mündung eines Büchsenlaufs betrage $d = 7^{mm}$; wieviel wiegen die Bleikugeln, welche die Büchse schiesst? Specif. Gewicht des Bleis $s = 11{,}33$.

11. Man soll ein Stück Tannenholz von a Kubikcentimeter mit einer Bleikugel verbinden, so dass die verbundenen Körper im Wasser schweben. Welcher Durchmesser muss der Bleikugel gegeben werden, wenn das specifische Gewicht des Tannenholzes gleich s und das des Bleies gleich s_1 ist? $s = 0{,}55$, $s_1 = 11{,}389$, $a = 7502{,}8$.

12. Eine hohle eiserne Kugel mit dem äusseren Durchmesser $2r$ sinkt gerade zur Hälfte im Wasser ein. Wie gross ist die Wandstärke der Kugel, wenn das specifische Gewicht des Eisens gleich 7,4 angenommen wird? $r = 2^{dc}$. (Das Gewicht eingeschlossener Luft soll nicht berücksichtigt werden.)

13. Eine Hohlkugel hat den äusseren Durchmesser d und das specifische Gewicht s; das specifische Gewicht ihres Stoffes ist s_1. Wie gross ist die Dicke und das Gewicht der Hülle? $d = 6{,}693^{dc}$, $s = 6{,}37$, $s_1 = 7{,}28$.

14. Wieviel Kugeln mit dem Durchmesser d^{dc} können aus a Kilogramm Blei gegossen werden, dessen specifisches Gewicht $s = 11{,}39$ ist? $a = 64$, $d = 0{,}16^{dc}$.

15. Ein Quadratdecimeter Eisenblech wiege $\frac{1}{12}$ Kilogramm. Wie gross muss eine daraus gefertigte Hohlkugel mindestens gemacht werden, damit dieselbe in Wasser schwimmen kann?

Zusammenges. Aufg.

16. Eine metallene Hohlkugel hat den äusseren Durchmesser $2r$ und die Wandungsdicke a; wie gross würde die Wandungsdicke sein, wenn aus ihrer Masse eine andere Hohlkugel mit dem äusseren Durchmesser $2R$ gegossen würde? $r = 10$, $a = 9$, $R = 12$.

17. Der zwischen zwei sich von innen berührenden Kugelflächen befindliche Raum beträgt a Kubikmeter, ihre Centrallinie ist gleich b Meter. Wie gross sind die Radien der Kugeln? $a = 108{,}909$, $b = 2$.

18. Eine concentrische Kugelschale hat die Dicke d, und ein ebener Schnitt, welcher durch die äussere Kugelfläche gelegt ist und die innere berührt, hat den Radius ϱ. Es soll der Inhalt der Schale der Hohlkugel gefunden werden.

19. Vier gleiche Kugeln, von denen jede die drei anderen berührt, werden sämmtlich von einer fünften Kugelfläche berührt.

Man soll die Verhältnisse der verschiedenen Radien, die der Oberflächen und die der Volumina dieser Kugeln finden.

20. In einem würfelförmigen Kasten liegt eine Kugel, die alle Flächen desselben berührt. Wieviel beträgt der gesammte nicht ausgefüllte Raum des Kastens, wenn der Durchmesser der Kugel gleich $2r$ ist? $r = 2{,}97153$.

21. Wie verhalten sich die Volumina eines Kegels, einer Kugel und eines Cylinders zu einander, wenn die Durchmesser der Grundflächen und die Höhen des Kegels und des Cylinders dem Durchmesser der Kugel gleich sind?

22. Eine Kugel mit dem Radius r soll in einen gleichseitigen Kegel von demselben Kubikinhalt verwandelt werden. Wie gross ist die Höhe desselben?

23. Das Volumen einer Kugel sei gleich 5575,3 Cubikcentimeter, der Flächeninhalt eines ebenen Schnitts derselben gleich 226,2 $\square^{cm}$. Wie verhalten sich die Theile des zum Schnitt senkrechten Radius, und wie die Theile der Oberfläche der Kugel zu einander?

Mit Cylinder.

24. Eine Kugel, deren Oberfläche gleich O gegeben ist, soll in einen geraden Cylinder von gleichem Kubikinhalt verwandelt werden. Wie gross ist der Radius der Grundfläche des Cylinders, wenn sein Mantel gleich der Oberfläche der Kugel sein soll? $O = 36{,}1035$.

25. Die Grundfläche eines geraden Cylinders sei gleich einem grössten Kreise einer Kugel, die gesammte Oberfläche des Cylinders verhalte sich zu dem Inhalt der Kugelfläche wie $m : n$; wie verhalten sich die Kubikinhalte der beiden Körper? Für welchen Werth von $m : n$ sind dieselben gleichgross?

26. Der körperliche Inhalt einer Kugel betrage K Kubikmeter. Wieviel beträgt der Inhalt derjenigen Fläche, welche die Peripherie des horizontalen grössten Kugelkreises beschreibt, wenn die Kugel, d. i. deren Mittelpunkt, sich lothrecht um h Meter tiefer senkt? $K = 28{,}6967$, $h = 0{,}15$.

27. Aus einem Cylinder, dessen Höhe gleich dem Radius seiner Grundfläche ist, sei eine Halbkugel von derselben Grundfläche herausgeschnitten. Man soll den übrigbleibenden Körper in einen geraden Cylinder von gleicher Höhe (und demselben Volumen) verwandeln; wie gross ist der Radius des letzteren?

28. Die aus einem geraden Cylinder und einer Halbkugel

bestehende Kuppel eines Gebäudes nimmt den Raum von a Kbm. ein; die Höhe der senkrechten Wand betrage b Meter. Wie gross ist ihr Durchmesser? $a = 3665\frac{1}{4}$; $b = 5$. (Cubische Gleichung.)

29. Eine Metallkugel von $a = 4^{cm}$ Durchmesser soll umgegossen werden zu einem Körper von $a = 4^{cm}$ Höhe, welcher aus einem geraden Cylinder und einer darauf passenden Halbkugel besteht. Wie gross ist der seitliche Durchmesser dieses Körpers? (Irreducibele Gl. 3. Gr.)

30. Aus einer Kugel soll ein gerader Cylinder herausgeschnitten werden, dessen Axenschnitt ein in einen grössten Kreis der Kugel einbeschriebenes Quadrat ist. Wieviel beträgt der Abfall, wenn der Kugelradius $r = 1{,}59615$ gegeben ist?

31. Eine Kugel mit gegebenem Radius werde durch einen geraden Cylinder von gegebenem Radius central durchbohrt. Man berechne den Rauminhalt des übrigbleibenden Körpers.

32. Die Oberfläche einer Kugel sei $O = 109$; wie gross ist der Mantel eines geraden Cylinders von gleichem Volumen, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist?

33. Eine gusseiserne massive Walze endigt an beiden Seiten in auf dieselbe passenden Halbkugeln. Wieviel wiegt dieser Körper, wenn seine grösste Länge von Gipfel zu Gipfel gleich h^{dc}, sein Durchmesser gleich d^{dc}, das specifische Gewicht des Gusseisens gleich s und das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser gleich einem Gramm ist? $s = 7{,}2$, $h = 40\frac{11}{10}$, $d = 1$.

34. Einer Halbkugel von Blei sei ein gerader Cylinder mit gemeinschaftlicher Grundfläche aufgesetzt. Welche Höhe kann der Cylinder haben, wenn der zusammengesetzte Körper auf der Kugelfläche im stabilen Gleichgewicht ruhen soll, und das specifische Gewicht des Bleies 11,35 ist?

Der Abstand des Schwerpunkts einer Halbkugel von ihrem Mittelpunkt beträgt $\frac{3}{8}$ des Radius.

35. Ein cylindrisches Gefäss, dessen Grundfläche den Durchmesser d hat, sei bis zu einer Höhe gleich h über der Grundfläche mit Wasser gefüllt; in dieses werde eine Kugel geworfen, deren Durchmesser gleich a ist, und welche ganz im Wasser untersinkt. Bis zu welcher Höhe steigt das Wasser hierdurch in dem Gefässe? $d = 4$, $h = \frac{7}{8}$, $a = 3$.

Mit Kegel. 36. In eine Kugel von gegebenem Radius r soll ein Kegel construirt sein, dessen Grundflächen-Radius sich zu seiner Höhe

wie $m:n$ verhalte. Wie verhalten sich die Oberflächen, und wie die Volumina der beiden Körper zu einander? $m:n=3:4$.

37. Eine Kugel mit dem Radius r soll in einen geraden Kegel von demselben Kubikinhalt verwandelt werden, so dass der Mantel dieses Kegels n mal so gross ist, als seine Grundfläche. Wie gross ist die Höhe desselben? $n=7$, $r=\sqrt[3]{9}$.

38. Um einen Kreis sei ein gleichseitiges Dreieck beschrieben; durch Umdrehung der Figur um eine Höhe des Dreiecks wird eine Kugel und ein Kegel erzeugt. Wie verhalten sich die Volumina dieser Körper zu einander?

39. Ebenso, wenn das Dreieck dem Kreise einbeschrieben ist.

40. Ein Dreieck mit den Seiten $a=33$, $b=56$, $c=65$ rotire um die längste Seite. Wie verhält sich das Volumen des entstehenden Doppelkegels zum Volumen der Kugel, deren Radius gleich demjenigen des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises ist?

41. In einen geraden Kegel, dessen Rauminhalt gleich V und dessen Höhe gleich h ist, hat man eine Kugel einbeschrieben; wie gross ist ihr Volumen? $V=7{,}6028$, $h=6$.

42. Das Volumen eines geraden Kegels betrage 301,5930, das Volumen der ihm einbeschriebenen Kugel 113,0973 Kubikdecimeter. Man berechne die Höhe und den Radius des Kegels.

43. Einem gleichseitigen Kegel sei eine Kugel und dieser ein gleichseitiger gerader Cylinder einbeschrieben. Man bestimme das Verhältniss der Gesammt-Oberflächen und das der Volumina dieser Körper.

44. Einer Kugel sei ein gerader Kegel umbeschrieben, dessen Höhe doppelt so gross als der Durchmesser der Kugel ist. Es wird das Verhältniss der Gesammt-Oberflächen und das der Volumina beider Körper gesucht.

45. In einen geraden Kegel, dessen Höhe gleich h und dessen Seitenlinie gleich s ist, sei eine Kugel beschrieben. Um wieviel ist der Kegel grösser als die Kugel? $h=60$, $s=65$.

46. In einen geraden Kegel, dessen Radius der Grundfläche gleich r und dessen Höhe gleich h ist, sei eine Kugel einbeschrieben, und diese werde zugleich von einer der Grundfläche des Kegels parallelen Schnittebene desselben berührt. Wie verhalten sich die Volumina des ganzen, des abgestumpften Kegels und der Kugel zu einander? $r=10$, $h=20$.

47. Wieviel beträgt der Grenzwerth der Summe der Vo-

lumina einer Reihe von Kugeln, welche sämmtlich von dem Mantel eines gegebenen geraden Kegels berührt werden, und von denen jede folgende die vorhergehende von aussen und die erste die Grundfläche des Kegels innerhalb des letzteren berührt?

Anmerkung. Die Summe der Kugeln ist stets kleiner als $\frac{3}{8}$ des Inhalts des Kegels. Für welches Verhältniss der Höhe des Kegels zum Radius seiner Grundfläche ist sein Inhalt doppelt so gross, als die Summe der Kugeln?

48. Eine Kugel sei in einen geraden kegelförmigen Hohlraum geworfen, dessen Axe lothrecht, die Spitze nach unten, steht. Die Grundfläche des Kegels sei der Oberfläche der Kugel gleich, der Rauminhalt des ersteren das $n$fache des Rauminhalts der letzteren. Wie tief sinkt die Kugel in dem Kegel ein, oder in welchem Verhältniss wird die Kegelaxe durch den Mittelpunkt der Kugel getheilt? $n = 1\frac{1}{2}$, oder $n = 4\frac{1}{2}$.

49. In einen auf der Spitze (bei vertikaler Richtung der Axe) stehenden gleichseitigen Kegel sei eine Kugel vom Radius r gelegt, und dann in den Hohlraum des Kegels soviel Wasser gegossen worden, dass die Kugel gerade bedeckt ist. Wie hoch wird das Wasser sich in dem Kegel stellen, wenn die Kugel herausgenommen wird? $r = 6{,}0822$.

50. Eine Kugel, deren Radius gleich r ist, habe mit einem geraden Kegel, dessen Höhe sich zum Radius seiner Grundfläche wie $m : n$ verhält, gleichen Kubikinhalt. Man berechne die Höhe h und den Radius ϱ der Grundfläche des Kegels. Welchen Werth muss $m : n$ erhalten, wenn $r = \varrho$ sein soll?

51. Durch eine Kugel sei ein ebener Schnitt gelegt, welcher den zu ihm senkrechten Radius im Verhältniss $m : n$ theilt. Auf der Durchschnittsfläche seien zwei gerade Kegel errichtet, deren Spitzen auf der Oberfläche der Kugel liegen. Wie verhält sich der Inhalt des entstandenen Doppelkegels zum Inhalt der Kugel? $m : n = 4 : 3$.

52. Die Oberfläche einer Kugel wird von einem Kreise, dessen Inhalt $F = 12{,}56637$ ist, im Verhältniss $1 : 3$ getheilt. Wie gross ist der Unterschied der Volumina und ebenso der Oberflächen der Kugel und des geraden Doppelkegels, der aus zwei über der Schnittfläche stehenden Kegeln besteht, die ihre Spitzen in der Kugelfläche haben?

53. Wie verhalten sich die Oberflächen einer Kugel und

eines geraden Doppelkegels zu einander, wenn die gemeinsame Grundfläche der Hälften des letzteren gleich dem grössten Kreise der Kugel ist und beide Körper gleiche Volumina haben? Wie verhalten sich aber die Volumina, wenn beide Körper gleiche Oberflächen haben?

54. Der Mittelpunkt der Grundfläche eines geraden Kegels sei die Spitze eines zweiten Kegels, dessen Seitenlinien auf den entsprechenden des ersteren senkrecht stehen. Wie gross ist der Radius einer Kugel, welche beide Kegelmäntel von innen berührt, und wie verhält sich ihr Volumen zu dem des entstandenen Doppelkegels?

55. In eine Kugel wird ein gerader Kegel einbeschrieben, so dass seine Höhe durch den Mittelpunkt der ersteren in stetiger Proportion getheilt wird. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Körper zu einander?

56. Der Radius einer Kugel sei gleich r; wie gross muss die Höhe eines derselben einbeschriebenen geraden Kegels sein, wenn das Volumen des Kegels $\frac{1}{n}$ des Volumens der Kugel betragen soll? $r = 6$, $n = 3\frac{5}{9}$. (Cubische Gleichung.)

57. Wie gross ist die Oberfläche eines geraden Kegels, welcher gleiches Volumen mit einer Kugel hat, deren Oberfläche gleich a ist, wenn die Höhe des Kegels gleich dem Durchmesser der Kugel ist? $a = 418$.

58. Eine Kegelfläche berühre eine Kugel, und der durch die Ebene des Berührungskreises abgeschnittene Kegelmantel verhalte sich zur abgeschnittenen kleineren Calotte dem Inhalt nach wie $(2 + \sqrt{5}) : 2$. Wie verhält sich das Volumen der Kugel zu dem des Kegels?

Mit Kegelstumpf.

59. Die Summe der Rauminhalte zweier Kugeln sei gleich dem Inhalt eines Kegelstumpfs von der Höhe h, dessen Grundflächen-Radien gleich R und r sind. Wie gross sind die Radien der Kugeln, wenn ihre Summe gleich $R + r$ ist? $h = 14\frac{14}{15}$; $R = 7$, $r = 3$.

60. Wie lang muss in einem abgekürzten geraden Kegel, dessen Grundflächen-Radien bezüglich eine Länge von 1^{cm} und x^{cm} haben, die Seitenlinie sein, um in denselben eine Kugel beschreiben zu können, und wie gross sind die Oberfläche und der Inhalt der Kugel?

61. In einen geraden abgestumpften Kegel lasse sich eine Kugel vom Radius r einbeschreiben, deren Inhalt gleich dem $n$ten Theile des Kegelstumpfs ist. Wie gross sind die Radien der Endflächen des letzteren? $r = 2$, $n = 2\frac{5}{8}$.

62. In einem geraden Kegelstumpfe, in welchen sich eine Kugel einbeschreiben lässt, beträgt der Mantel dreimal so viel, als die Differenz d der beiden Grundflächen. Wie verhält sich das Volumen der einbeschriebenen Kugel zum Volumen des Stumpfes?

63. Die Radien der Endflächen eines geraden abgestumpften Kegels zu berechnen, der gleiches Volumen, gleiche Gesammtoberfläche und gleiche Höhe hat mit einer Halbkugel, deren Durchmesser gleich d gegeben ist. $d = 6$.

64. Aus einem geraden Kegelstumpf ist eine Halbkugel herausgeschnitten, deren Grundfläche die obere Endfläche des Stumpfs ist, und dieselbe berühre die andere Endfläche. Man soll den Kubikinhalt des übrigbleibenden Körpers aus dem Radius R der grösseren Endfläche und aus dem Verhältniss des Volumens der Halbkugel zum Volumen des Kegelstumpfs gleich 2 : 13 berechnen.

Mit Kugel. 65. Durch eine Kugel, deren Radius gleich r ist, sei ein ebener Schnitt im Abstand a vom Mittelpunkt gelegt, und in jedes der beiden Kugelsegmente sei die grösste Kugel construirt, welche die erste Kugel und die Schnittebene berührt. Wie verhält sich die Summe der Volumina der eingeschlossenen Kugeln zum Volumen des übrigbleibenden Raumes der ersten Kugel? $a : r = 1 : 3$.

66. Von acht gleichen Kugeln, deren Mittelpunkte die Eckpunkte eines Würfels bilden, berühre jede drei der übrigen; alle acht werden von einer dieselben umschliessend berührenden Kugel eingehüllt, und letztere sei darauf durch eine concentrische Kugelfläche ausgehöhlt, welche zwischen den acht ersteren, dieselben sämmtlich von aussen berührend, liegt. Wie verhält sich das Volumen der Hohlkugel zu der Summe der Volumina der acht gleichen Kugeln?

(Mit Polyeder. 67. Eine abgestumpfte, regelmässige, sechsseitige Pyramide, deren Grundflächen bezüglich die Kantenlängen $2a$ und a besitzen, und deren Höhe gleich $a\sqrt{2}$ ist, sei zu einer vollständigen

Pyramide ergänzt. Man berechne den Radius und das Volumen der um die Ergänzungspyramide beschriebenen Kugel.

68. In einem geraden Prisma, dessen Grundfläche ein regelmässiges Achteck mit der längsten Diagonale $a = 10^{cm}$ ist, betrage die Höhe das Zweifache einer Seite der Grundfläche. Man berechne den Radius der Kugel, deren Volumen dem Volumen des Prismas gleich ist.

69. Aus einem Pyramidenstumpf, dessen grössere Grundfläche gleich 16 Quadratcentimeter, dessen Höhe gleich 6 Centimeter ist, und dessen homologe Grundkanten sich wie 5 : 3 verhalten, sollen ein regelmässiges Tetraëder und eine Kugel, beide von gleichem Volumen, geformt werden. Man berechne die Kante des Tetraëders und den Radius der Kugel.

70. Aus einer 3,76 Kilogramm schweren hölzernen Kugel vom specifischen Gewicht 0,85 werde ein möglichst grosses regelmässiges Oktaëder geschnitten. Wieviel wiegt der Abfall? Welche Angabe war überflüssig?

71. Ein silbernes regelmässiges Tetraëder, ein kupfernes Oktaëder und ein eisernes Hexaëder von gleichem Gewicht sollen benutzt werden, um aus ihnen drei möglichst grosse Kugeln herauszuarbeiten. Wie verhalten sich die Rauminhalte dieser Kugeln zu einander, wenn die specif. Gewichte des Silbers, des Kupfers und des Eisens beziehungsweise gleich 10,6, gleich 8,9 und gleich 7,6 sind?

72. Die drei aus einem regelmässigen Tetraëder, Oktaëder und Hexaëder ausgearbeiteten grössten Kugeln verhalten sich dem Rauminhalt nach wie 1 : 2 : 3. In welchem Verhältniss stehen die Volumina dieser drei Polyeder?

73. Ueber einem gleichseitigen Dreieck ist ein gerades Prisma errichtet, in welchem die Summe der drei Seitenflächen gleich der Summe der beiden Grundflächen ist. Wie gross sind das Volumen dieses Körpers, der Radius, die Oberfläche und das Volumen der ihm umbeschriebenen Kugel, wenn die Grundkante gleich a ist?

74. Einem regelmässigen Oktaëder sei eine Kugel einbeschrieben; es soll das Verhältniss der Volumina beider Körper durch seine fünf ersten Näherungsbrüche bestimmt werden.

75. In eine Kugel, deren Kubikinhalt gleich V gegeben ist, sei ein regelmässiges Tetraëder, in dieses eine zweite Kugel,

in diese ein zweites Tetraëder, u. s. w. bis ins Unendliche einbeschrieben. Wie gross ist die Summe der Rauminhalte der Kugeln, wie gross die der Tetraëder?

76. Dieselbe Aufgabe, wie 75, nur sollen statt der Tetraëder regelmässige Oktaëder construirt sein.

77. In einen Würfel denke man sich eine Kugel, in diese wieder einen Würfel, u. s. f. bis ins Unendliche einbeschrieben. Ferner sei in einen gleichen Würfel ein gerader Cylinder so construirt, dass seine Axe in einer Diagonalaxe des Würfels liegt, seine Grundflächen je drei Seitenflächen des letzteren berühren, und dass sich in den Cylinder wieder ein Würfel einbeschreiben lässt, dessen Grundflächen denjenigen des Cylinders einbeschrieben sind. In diesen neuen Würfel werde auf gleiche Weise ein Cylinder construirt gedacht, u. s. f. bis ins Unendliche. Wie verhält sich die Summe der Volumina jener Kugeln zur Summe dieser Cylinder?

78. In ein regelmässiges Tetraëder sei eine Kugel einbeschrieben, darauf in jede der Tetraëderecken wieder eine Kugel, welche die erstere und die drei Flächen der Ecke berührt, sodann in jede Ecke eine zweite Kugel, welche die vorige und die drei Ebenen berührt, u. s. f. bis ins Unendliche. Wie verhält sich der Rauminhalt der ersten Kugel zur Summe aller folgenden?

79. In welchem Abstand von der Spitze muss man ein regelmässiges Tetraëder, dessen Kante gleich a gegeben ist, parallel zu der Grundfläche durchschneiden, damit die in den oberen Theil beschriebene Berührungskugel und der in den unteren Theil construirte, mit seinem Mantel die Seitenflächen berührende Kegelstumpf gleiche Volumina haben?

80. Wie verhält sich das Volumen eines Cylinders, auf dessen Mantelfläche (und zugleich auf je einer Grundfläche) die sechs Ecken eines regelmässigen Oktaëders liegen, zum Volumen der in das Oktaëder einbeschriebenen Kugel?

81. In ein regelmässiges Oktaëder seien drei gleiche Kugeln gelegt, so dass ihre Mittelpunkte in gerader Linie liegen, und jede der beiden äusseren von vier in einer Oktaëderecke zusammenstossenden Grenzflächen dieses Polyeders, sowie von der dritten Kugel berührt wird. Man soll beweisen, dass der Radius dieser Kugeln mit dem Durchmesser zweier in das Oktaëder auf entsprechende Weise zu construirenden Kugeln zusammen halb so

lang ist, als die Hauptaxe des Oktaëders, und das Verhältniss der Volumina zweier Kugeln der beiden Arten berechnen.

82. Ein Cylinder, welcher einem geraden dreiseitigen Prisma mit den Grundkanten a, b, c und der Höhe h umbeschrieben war, sei in eine gleichgrosse Kugel verwandelt. Man berechne die Oberfläche der Kugel. $a = 15$, $b = 13$, $c = 14$, $h = 62$ Centimeter.

83. In die obere Grundfläche eines quadratischen Cylinders, dessen Radius gleich r gegeben ist, sei ein Quadrat beschrieben, und auf diesem stehe eine Pyramide, deren Seitendreiecke gleichseitig sind. Der ganze Körper sei aus Metall und werde zu einer Kugel umgegossen. Wie gross ist der Radius der letzteren?

84. Der Inhalt einer Kugel betrage $14391\frac{1}{3}$ Kubcm. Zwei parallele Ebenen, welche auf entgegengesetzten Seiten des Kugelmittelpunkts in gleichen Entfernungen von diesem die Kugeloberfläche schneiden, bestimmen auf letzterer eine Zone von 1896,17 $\square^{cm}$ Flächeninhalt. Wieviel Kubikmeter enthält derjenige gerade Cylinder, dessen Grundflächen mit den die Zone begrenzenden Schnittkreisen zusammenfallen? Mit Zonenfläche.

85. An zwei Kreise seien vier gemeinschaftliche Tangenten gelegt; die Bogen zwischen je zwei ungleichartigen dieser Tangenten beschreiben, indem sie um die Centrallinie rotiren, Kugelzonen. Es sei die Summe a der Flächeninhalte dieser Zonen und die Summe b der Rauminhalte der vollen Kugeln, sowie die Länge c der Centrallinie gegeben. Man soll die Radien berechnen. $a = 141{,}371\ \square^{cm}$, $b = 791{,}680$ Kubcm., $c = 16^{cm}$.

86. Aus dem Volumen V einer Kugel und dem Flächeninhalt F einer Calotte derselben den die letztere durch Rotation erzeugenden Bogen in Grad- und in Längen-Mass zu berechnen. $V = 904{,}78$ Kubm., $F = 43{,}199\ \square^{m}$. β

87. In eine Kugel, deren Volumen gleich V ist, sei ein gerader Kegel einbeschrieben, dessen Winkel an der Spitze eines Axenschnitts gleich α ist. Wie gross ist das Volumen dieses Kegels? $V = 2713{,}476$, $\alpha = 67^0\ 14'\ 24''{,}5$.

88. In einem geraden abgestumpften Kegel sind die Radien der Grundflächen bezüglich gleich R und r; die Seitenlinien sind unter dem Winkel α gegen die grössere Grundfläche geneigt. Wie gross ist der Radius einer Kugel von gleichem Volumen? $R = 17$, $r = 11$, $\alpha = 37^0\ 14'$.

89. Ein Rhombus hat die Seite s und den spitzen Winkel α. Wie gross ist der Rauminhalt eines Cylinders, welcher diesen Rhombus zum Normalschnitt hat, und in welchem Verhältniss steht er zu dem Volumen derjenigen Kugel, deren grösster Kreis dem in den Rhombus einbeschriebenen Kreise gleich ist? $s = 11{,}4716$, $\alpha = 57^0\ 30'\ 15''$.

90. Man berechne den Mantel eines geraden Kegels, dessen Seitenlinie mit der Grundfläche den Neigungswinkel α bildet, und dessen Volumen gleich dem einer Kugel mit dem Radius r ist. $\alpha = 59^0\ 17'\ 12''$, $r = 3{,}02153$.

91. In eine regelmässige gerade Pyramide, deren Grundfläche ein n-Eck mit der Seite a, und deren Höhe $m$mal so gross als der Radius des Kreises ist, welcher sich dem n-Eck einbeschreiben lässt, sei eine alle Grenzflächen der Pyramide berührende Kugel beschrieben. Wie gross ist der Inhalt dieser Kugel und wie gross ist die Oberfläche derjenigen Kugel, welche sich um die Pyramide beschreiben lässt? $n = 9$, $m = 3$.

92. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse gleich c, ein spitzer Winkel gleich α ist; die den Scheitel dieses Winkels treffende Seitenkante stehe senkrecht zu der Ebene des Dreiecks, und die Ebene der beiden anderen Seitenkanten bilde mit der Grundfläche den Winkel β. Man berechne das Volumen einer Kugel, deren Oberfläche durch die Eckpunkte der Pyramide geht. $c = 2{,}8878$, $\alpha = 30^0\ 35'\ 15''$, $\beta = 52^0\ 11'\ 4'',7$.

93. Die Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide seien bezüglich gleich a, b, c, die von ihnen eingeschlossenen Winkel an der Spitze $(a\,b) = \gamma$, $(a\,c) = \beta$, $(b\,c) = \alpha$. Man berechne das Volumen einer Kugel, welche mit dieser Pyramide gleiche Oberfläche hat. $a = 14$, $b = 15$, $c = 44$, $\alpha = \gamma = 53^0\ 7'\ 48'',4$, $\beta = 64^0\ 25'\ 2'',2$.

94. Auf jede Fläche eines Würfels, dessen Kante gleich a ist, sei eine gerade Pyramide aufgesetzt, welche diese Fläche zur Grundfläche hat, und deren Seitenflächen jedesmal mit letzterer den Winkel α bilden. Durch die Spitzen der sechs Pyramiden lässt sich eine Kugel legen. Wie gross ist der von jenem Polyeder nicht eingenommene Hohlraum derselben? $a = 12{,}324$, $\alpha = 26^0\ 33'\ 54'',4$.

§. 27. Kugelausschnitt, Kugelsegment und körperliche Zone.

Ausschnitt.

1. Ueber der Grundfläche eines geraden Kegels sei eine Kugelmütze construirt, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist. Man berechne aus dem Radius ϱ des Grundkreises und der Höhe h des Kegels den Kubikinhalt des gesammten Körpers. $\varrho = 5$, $h = 12$.

2. Ein Kreissector, dessen Radius gleich r und dessen Centriwinkel gleich 60^0 ist, rotire um einen der ihn begrenzenden Radien. Man berechne den Kubikinhalt des entstehenden Kugelausschnitts. Wie verhält sich derselbe zum Kubikinhalt einer ganzen Kugel, deren Radius gleich r ist?

3. In jeder von zwei Kugeln, deren Radien sich wie $m : n = 7 : 5$ verhalten, sei ein Kugelausschnitt construirt, so dass die Höhen der zugehörigen Segmente einander gleich sind. Das Volumen des Ausschnitts der zweiten Kugel sei gleich $V = 35$ gegeben. Wie gross ist das Volumen des Ausschnitts der ersten Kugel?

4. Das Volumen eines Kugelausschnitts aus dem Umfang p der ebenen Grundfläche des zugehörigen Segments und dem Umfang P eines grössten Kreises der Kugel zu berechnen. Insbesondere sei $p = \frac{4}{5} P$.

Segment. Für sich. Einf. Aufg.

5. Man berechne den Kubikinhalt eines Kugelsegments aus seiner Höhe h und dem Radius r der Kugel für α) $r = 4{,}17892$, $h = 9$; β) $r = 6{,}98498$, $h = 20$.

6. Aus dem Kubikinhalt V und der Höhe h eines Kugelsegments den Radius r der Kugel zu berechnen. $V = 126{,}535$, $h = 3{,}2$.

7. Die Höhe h eines Kugelsegments aus dem Kubikinhalt V desselben und dem Radius r der Kugel zu berechnen. — Cubische Gleichung, für $V = 5{,}236$, $r = 2$ leicht aufzulösen.

8. Den Kubikinhalt eines Kugelsegments aus seiner Höhe h und dem Radius ϱ seines Grundkreises zu berechnen. $h = 5$, $\varrho = 1{,}3611$.

9. Das Volumen eines Kugelsegments aus der Höhe h desselben und der Oberfläche O der ganzen Kugel zu berechnen. $h = 1{,}5$, $O = 139{,}294$.

Gewicht.

10. Eine hölzerne Kugel von a^m Durchmesser sinkt in

destillirtem Wasser von 4^0 so weit ein, dass der hervorragende Theil die Höhe h^m hat. Wie gross ist das specifische Gewicht der betreffenden Holzart? $a = 10$, $h = 2$.

11. Wieviel beträgt das Gewicht einer Kugel, welche in Wasser zum grösseren Theil einsinkt, wenn sie an der Oberfläche des Wassers einen Kreis von a^{cm} Umfang bildet, während ein grösster Kreis derselben einen Umfang von b^{cm} hat? $a = 5{,}0892$, $b = 14{,}6276$.

12. Man berechne das Gewicht einer Kugel von $r = 19^{cm},4485$ Radius, welche, in einer Flüssigkeit vom spec. Gewicht 1,15 schwimmend, mit dem vierten Theile ihrer Oberfläche über das Niveau hervorragt.

Verb. mit der Oberfl.

13. Das Volumen eines Kugelsegments zu bestimmen, dessen krumme Oberfläche gleich O ist, und dessen Grundkreis den Abstand a vom Mittelpunkt hat. $O = 1303$, $a = 14{,}042$.

14. Aus dem Radius r einer Kugel die Höhe und den Kubikinhalt eines Segments derselben zu bestimmen, dessen krumme Oberfläche viermal so gross ist, als seine Grundfläche. $r = 6{,}33843$.

15. Ein Kugelabschnitt sei halb so gross als der Kugelausschnitt, zu welchem er gehört. Man berechne seine Höhe aus dem Kugelradius.

16. Aus dem gegebenen Kubikinhalt V eines Kugelsegments, dessen Calotte $n = 2$ mal so gross ist, als seine Grundfläche, den Radius der Kugel zu berechnen. $V = 718{,}383$.

17. Eine Kugel, deren Radius $r = 10$ ist, sei durch eine Ebene so geschnitten, dass sich die Theile ihrer krummen Oberfläche wie $m : n = 1 : 4$ verhalten. Wie gross sind die Volumina der zugehörigen Segmente?

18. Wenn das Volumen einer Kugel durch eine Ebene im Verhältniss $m : n$ getheilt wird, wie weit steht diese dann vom Mittelpunkt der Kugel ab? (Cubische Gl.) $m : n = 5 : 27$.

19. In welcher Entfernung vom Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius r muss dieselbe durchschnitten werden, wenn die krumme Oberfläche des kleineren der entstehenden Abschnitte gleich einem grössten Kreise der Kugel sein soll, und wieviel beträgt der Rauminhalt dieses Abschnittes?

20. Die Oberfläche eines Körpers sei gegeben, welcher aus zwei congruenten Kugelabschnitten besteht. Wie gross ist das

Volumen des Körpers, wenn die krumme Oberfläche eines jeden der beiden Theile vervollständigt durch den Mittelpunkt der anderen gehen würde? $O = 169{,}646$.

Mit Polyeder.

21. Einem geraden rechtwinkeligen Parallelepipedon, dessen Kanten a, b, c gegeben sind, sei eine Kugel umbeschrieben. Man berechne die Volumina der Stücke, in welche diese durch die Erweiterung einer die Kanten b und c enthaltenden Seitenfläche getheilt wird. $a = 3$, $b = 4$, $c = 12$.

Regelm. Polyeder.

22. In welchem Verhältniss wird das Volumen einer Kugel durch eine (erweiterte) Grenzfläche eines ihr einbeschriebenen regelmässigen Tetraëders getheilt?

23. Dieselbe Aufgabe, wenn statt des Tetraëders ein Würfel gesetzt wird.

24. Ebenso für ein regelmässiges Oktaëder.

25. Zu einem regelmässigen Oktaëder sei eine Kugel so construirt, dass die Kanten des Oktaëders die Kugel berühren. Wie gross sind die Räume, die in den Ecken des Oktaëders durch die Kugel abgeschlossen werden, wenn die Kante des ersteren gleich $2a$ ist?

Mit Cylinder.

26. In eine Kugel mit dem Radius r sei ein Cylinder construirt, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist. Wie gross sind die vier Stücke, in welche die Kugel hierdurch getheilt wird?

27. An einer Kugel mit dem Radius r soll ein Segment so bestimmt und geometrisch construirt werden, dass sein Volumen der dritte Theil des auf der Grundfläche des Segmentes stehenden, der Kugel einbeschriebenen geraden Cylinders werde.

28. Aus einer Kugel, deren Radius gleich r ist, sei ein cylinderförmiger Kern herausgebohrt, dessen Axe ein Durchmesser der Kugel ist, und dessen Grundfläche sich zu einem grössten Kreis der Kugel wie $m : n$ verhält. Wie gross ist das Volumen des Kerns? $r = 3$, $m = 1$, $n = 4$.

29. Die Gesammt-Oberfläche eines quadratischen Cylinders sei gleich O. Wenn dieser Cylinder in eine gleichgrosse Kugel verwandelt würde, wie gross würde dann das Volumen eines Segments derselben sein, dessen Höhe gleich h wäre? $O = 73{,}357$, $h = 2$.

30. Eine Kugel wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Segmente getheilt, deren Höhen sich wie 1 : 2 verhalten. Wie

verhalten sich die Radien der gleichseitigen Cylinder zu einander, welche bezüglich diesen Segmenten inhaltsgleich sind?

31. Durch eine Halbkugel soll ein der Grundfläche paralleler Schnitt so gelegt werden, dass das abgeschnittene Segment mit demjenigen Cylinder gleichen Rauminhalt habe, welcher den Schnitt zur Basis und seine Entfernung von der Grundfläche zur Höhe hat. In welchem Abstand von der Grundfläche ist der Schnitt zu legen?

32. Eine Kugel soll durch eine gerade Cylinderfläche durchbohrt werden, deren Axe ein Durchmesser der Kugel und deren Grundflächen-Durchmesser gleich dem Radius der Kugel ist. In welchem Verhältniss stehen die Rauminhalte der Kugel und der ausgebohrten Masse derselben?

33. In ein cylindrisches Gefäss, dessen Grundfläche einen Radius von 16^{cm} Länge hat, und dessen Höhe $26^{dc},803$ beträgt, befinden sich 212 Liter Wasser. Wie gross ist der Radius einer Kugel, die 141^{mm} in das Wasser eintauchen muss, damit es den Cylinder ausfüllt?

Mit Kegel. 34. Ein Kessel ist aus einem abgestumpften geraden Kegel, dessen oberer und unterer Durchmesser bezüglich $a = 39^{dc},5532$ und $b = 26^{dc},3688$, und dessen Tiefe $c = 8^{dc},7896$ beträgt, und einem Kugelabschnitt auf der unteren Fläche, dessen Höhe $h = 6^{dc},5922$ ist, zusammengesetzt. Wieviel Kubikdecimeter enthält derselbe, und wieviel Quadratdecimeter beträgt seine Oberfläche?

35. Eine undurchsichtige Kugel, welche auf einer horizontalen Ebene ruht, wird von einem vertikal über ihrem Mittelpunkt in der Entfernung a von demselben befindlichen leuchtenden Punkt bestrahlt. Wie gross ist das Verhältniss der Rauminhalte des beleuchteten und des beschatteten Segments, wenn der Kugelradius gleich r ist? $a = 16\frac{2}{3}$, $r = 10$.

36. Das Volumen eines Kugelabschnitts sei gleich V, seine Höhe gleich h. Die Kugel, welcher derselbe angehört, werde in einen Kegel verwandelt, dessen Grundfläche gleich dem Grundkreise des Abschnitts ist. Wie gross ist der Mantel dieses Kegels? $V = 21{,}333$, $h = 1{,}59718$.

37. Von einer Kugel, deren Radius gleich r gegeben ist, sei ein Segment abgeschnitten, dessen Mantel sich zum Mantel eines geraden Kegels von derselben Grundfläche und Höhe wie

$p : q$ verhalte. Wie gross ist der Inhalt dieses Segments? $r = 15{,}3$, $p : q = 8 : 5$.

38. Von einer Kugel, deren Radius gleich r gegeben ist, soll ein Segment so abgeschnitten werden, dass sich der Inhalt desselben zum Inhalt eines geraden Kegels von derselben Grundfläche und Höhe wie $p : q$ verhalte. Wie gross ist **a**) der Mantel des Kegels, **b**) die zu dem Kugelsegment gehörige Calotte? $r = 5$, $p : q = 8 : 5$.

39. In eine gegebene Kugel sei ein gerader Kegel beschrieben, welcher mit dem anliegenden Kugelabschnitt gleiches Volumen habe. Man berechne seine Höhe. $r = 3{,}12314$.

40. Die Axe eines geraden Kegels sei ein Durchmesser einer Kugel, welche die Grundfläche des Kegels berührt. Man berechne die Grösse des dem Kegel und der Kugel gemeinsamen Körperstücks aus den beiden Radien.

41. Aus einer Kugel mit dem Radius R wird ein gerades kegelförmiges Loch so gebohrt, dass dessen Axe durch den Mittelpunkt der Kugel geht, seine Spitze in der Oberfläche der Kugel liegt, und die Grundfläche des Bohrlochs einen Radius von $r = \frac{4}{5} R$ hat. Wie verhält sich das Volumen der ausgebohrten Masse zu dem Volumen der ganzen Kugel?

42. Von zwei gleichen Kugeln liegt der Mittelpunkt der einen auf der Oberfläche der anderen. Wie verhält sich das Volumen des ihnen gemeinschaftlichen Körperstücks zu dem Volumen einer der ganzen Kugeln? Mit Kugel.

43. Welche Höhe hat das Segment einer Kugel vom Radius r, dessen Rauminhalt doppelt so gross ist als der einer Kugel, welche diese Höhe zum Radius hat?

44. Der Radius einer Kugel sei gleich r, die Höhe eines Abschnitts derselben gleich h gegeben. Wie dick muss die Wandung einer Hohlkugel sein, deren äussere Fläche denselben Radius r hat, wenn der Rauminhalt der Wandung gleich dem des Kugelabschnitts sein soll? $r = 1 + \sqrt{3}$, $h = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$.

45. Von der grösseren von zwei concentrischen Kugeln, deren Volumina sich wie $m : n$ verhalten, wird durch eine Berührungsebene der kleineren ein Segment abgeschnitten. Wie verhält sich das Volumen dieses Segments zu dem Volumen der kleineren Kugel? $m : n = 27 : 8$.

Vermischtes.

46. Eine Halbkugel, deren Radius $r = 1$ ist, soll durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene in zwei gleiche Theile getheilt werden. In welcher Entfernung von der Grundfläche ist der Schnitt zu führen? (Cubische Gleichung.)

47. Ein kugeliges Gewölbe hat im Innern die Höhe h und den Durchmesser d der Grundfläche, seine Wandstärke ist an der Basis, horizontal gemessen, gleich a. Wieviel beträgt der Kubikinhalt der Wandung? $h = 4{,}7559$, $d = 16{,}4748$, $a = 2{,}7458$.

48. Aus einer Kugel vom Radius r ist ein cylinderförmiger Kern ausgebohrt, dessen Axe ein Durchmesser der Kugel ist, und dessen Grundkreis sich zur Oberfläche der Kugel wie $m : n$ verhält. Der von der Kugel übrig gebliebene Ring werde zu einer vollen Kugel von gleichem Rauminhalt umgeformt. Wie gross ist der Radius derselben? $m : n = 4 : 25$.

49. Um den Grundkreis einer Halbkugel sei ein regelmässiges Sechseck beschrieben und von den Eckpunkten desselben seien Tangenten an die Kugel gelegt, die einander in der Axe des Grundkreises schneiden. Diese Tangenten seien die Seitenkanten einer sechsseitigen Pyramide. Wie gross ist der Theil der Halbkugel, welcher innerhalb dieser Pyramide liegt, und wie gross ist die Summe der Räume zwischen der Halbkugel und der Oberfläche der Pyramide? Gegeben der Radius r der Halbkugel.

Zone.

50. Man berechne den Kubikinhalt einer körperlichen Kugelzone aus dem Radius r der Kugel, der Höhe h der Zone und dem Abstand p ihrer grösseren Grundfläche vom Kugelmittelpunkt für $r = 0{,}91695$, $h = 0{,}2$, $p = 0{,}5$.

51. Den Kubikinhalt einer körperlichen Zone aus dem Kugelradius R und den Radien r, ϱ der Endflächen der Zone zu berechnen. $R = 25$, $r = 24$, $\varrho = 15$.

52. Ebenso aus den Radien r, ϱ der Endflächen und der Höhe h der Zone. $r = 56$, $\varrho = 25$, $h = 23$.

53. Wie verhält sich bei einer Kugel vom Radius r der Kubikinhalt einer körperlichen Zone, welche die Höhe $2h$ hat und von einem grössten Kreise der Kugel halbirt wird, zu dem Kubikinhalt eines Segments derselben Kugel von gleicher Höhe? $r = 4$, $h = 3$.

54. Aus einer Kugel vom Radius r soll eine körperliche Zone von der Höhe h herausgeschnitten werden. Welche Abstände

müssen die Endflächen derselben vom Mittelpunkt der Kugel haben, wenn das Volumen der Zone $\frac{1}{n}$ des Kugelvolumens sein soll? $n = \frac{32}{11}$, $h = \frac{1}{2} r$.

55. Die Höhe einer körperlichen Zone sei gleich h und der Radius des zu ihren beiden Endflächen in gleichem Abstande parallelen Durchschnittskreises gleich ϱ gegeben. Man berechne den Rauminhalt der körperlichen Zone.

Zusatz: Die Volumina körperlicher Kugelzonen, welche gleiche mittlere Durchschnittsflächen und gleiche Höhe haben, sind gleichgross, welches auch die Länge des zugehörigen Kugelradius sein mag.

Für welchen Werth des Kugelradius verwandelt sich die obige Zone in ein Segment?

56. Um einen geraden Cylinder, dessen Höhe $2\frac{2}{3}$mal so gross ist als der Radius der Grundfläche, sei eine Kugel beschrieben. Wie verhält sich das Volumen der von den Grundflächen des Cylinders eingeschlossenen Zone zu dem eines Segments dieser Kugel, welches durch eine der Grundflächen abgeschnitten wird?

57. Eine durch ihren Halbmesser r gegebene Halbkugel ist durch eine Parallelebene ihres Hauptkreises derartig durchschnitten, dass die abgeschnittene Zonenfläche sich zu der abgeschnittenen Calottenfläche wie 3 : 2 verhält. Man sucht die Seite eines Würfels, welcher dem entstandenen Zonenkörper inhaltsgleich ist. $r = 7{,}418$.

58. Auf einem prismatischen Unterbau mit regelmässigsechsseitiger Grundfläche ruhe zunächst eine körperliche Kugelzone, welche dadurch entstanden gedacht werden kann, dass über dem der oberen Grundfläche des Prismas einbeschriebenen Kreis eine Halbkugel von demselben Radius construirt und die letztere parallel zu ihrer Grundfläche so durchschnitten sei, dass die Höhe der Zone gleich der halben Höhe des Prismas geworden ist. Auf der oberen Endfläche dieser Zone stehe ferner ein gerader Cylinder, dessen Höhe $n$mal so gross sei, als die Höhe des Prismas; auf diesen Cylinder folge ein abgestumpfter gerader Kegel, dessen nach unten gerichtete kleinere Grundfläche die obere Endfläche des Cylinders, dessen grössere Grundfläche gleich dem grössten Kreise der vorher genannten Kugelzone, und dessen Höhe gleich

der Höhe dieser Zone sei. Endlich sei der oberen, grösseren Grundfläche dieses Kegels ein regelmässiges Zwölfeck einbeschrieben, und über letzterem als Grundfläche eine abgestumpfte gerade Pyramide construirt, deren Höhe $m$mal so gross als die Höhe des prismatischen Unterbaues ist, und deren obere Endfläche den Flächeninhalt f hat. Die Grundkante des Prismas sei gleich a, die Höhe desselben gleich h. Man berechne die Oberfläche und das Volumen des gesammten Körpers.

59. Wenn man durch die Eckpunkte eines Würfels eine Kugel legt und jede Grenzfläche des Würfels bis zu der Kugelfläche erweitert, so wird der Raum der Kugel ausser dem Würfel noch in zwei Arten von Körpern getheilt, nämlich Zweiecke kleinerer Kreise und Kugelabschnitte, von deren jedem vier solche Zweiecke weggenommen sind. Wie gross ist jeder dieser Körper, wenn die Kante des Würfels gleich a ist?

Ausschnitt. β

60. Den Kubikinhalt eines durch eine Kegelfläche entstehenden Kugelausschnitts aus dem Radius r und dem Centriwinkel α zu berechnen. $r = 26{,}246$, $\alpha = 48^0\ 20'\ 38'',8$.

61. Aus dem körperlichen Inhalt V eines Kugelsectors und dem Centriwinkel α seines Axenschnitts den Radius der Kugel zu berechnen. $V = 570{,}57$, $\alpha = 86^0\ 38'\ 0''$.

62. Den Rauminhalt eines Kugelausschnitts aus dem Volumen V der Kugel und dem Centriwinkel α des Axenschnitts zu berechnen. $V = 458$, $\alpha = 47^0\ 0'\ 28''$.

63. Die Höhe eines geraden Kegels sei gleich h, der Winkel an der Spitze seines Axenschnitts gleich 2α. Wieviel beträgt der Rauminhalt des Kugelausschnitts, zu welchem der Kegel ein Ergänzungsstück bildet? $h = 3{,}12307$, $\alpha = 27^0\ 10'\ 20''$.

64. Wie gross muss der Radius einer Kugel sein, wenn eine Vergrösserung desselben um $a = 5^{cm}$ den Rauminhalt eines Ausschnitts derselben, dessen Centriwinkel $\alpha = 48^0$ beträgt, um $b = 2874{,}53$ Kubcm. vermehrt?

65. Man berechne den Centriwinkel eines Kugelsectors, für welchen der kegelförmige Theil denselben Rauminhalt wie das zugehörige Segment hat.

66. In einem Kreissector, dessen Centriwinkel gleich α ist, soll ein Radius so gezogen werden, dass, wenn der Sector um einen der ihn begrenzenden Radien rotirt, der entstehende Kugelausschnitt durch die von jenem ersteren Radius bei der Rotation

beschriebene Kegelfläche halbirt wird. Welchen Winkel bildet der gesuchte Radius mit der Drehungsaxe? $\alpha = 90^0$.

67. Wie gross ist das Volumen eines Kugelausschnitts, welcher eine der kalten Zonen der Erde zur Basis hat, wenn der Radius der Erde zu 859,5 geogr. Meilen angenommen wird, und der Polarkreis $23^0\ 27'$ vom Pole entfernt ist?

Segment. 68. Aus dem Radius r einer Kugel und dem Winkel φ zweier gegenüberliegenden Seitenlinien eines Sectors derselben das Volumen des zugehörigen Segments zu berechnen. $r = 3{,}18236$, $\varphi = 141^0\ 3'\ 26''$.

69. Aus dem Volumen V eines Kugelsegments und dem Volumen K der ganzen Kugel den Bogen zu berechnen, durch dessen Rotation die Calotte des Segments erzeugt wird. (Cubische Gleichung.) $V = 5$, $K = 32$.

70. Der Kegel und das Segment, aus welchen ein Kugelsector besteht, verhalten sich an Rauminhalt wie 1 : 3. Wie gross ist der Centriwinkel des Sectors, und in welchem Verhältniss wird die Axe des letzteren durch den Grundkreis des Kegels getheilt?

71. An einen Kreis mit dem Radius r seien zwei Tangenten gezogen, welche sich unter dem Winkel α schneiden. Die Figur rotire um die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes der Tangenten und des Mittelpunktes des Kreises. Man berechne den Kubikinhalt des von dem entstehenden Kegelmantel und dem kleineren Abschnitt der Kugelfläche begrenzten Körpers. $r = 4\frac{113}{150}$, $\alpha = 63^0\ 4'\ 48''$.

Zone. 72. In einem Halbkreis, dessen Radien gleich r sind, seien zwei Radien gezogen, welche den zugehörigen Bogen im Verhältnis $m : n = 1 : 2$, bezw. $2 : 1$ theilen. Von jedem Theilpunkt aus sei eine Gerade gezogen, welche die Verlängerung des Durchmessers nach der Seite des zugehörigen kleineren Bogens hin in einem Punkte schneidet, der von dem Bogen einen Abstand gleich dem Radius hat. Die ganze Figur rotire um den Durchmesser. Man soll das Volumen des entstehenden Körpers berechnen. $r = 9{,}1416$.

73. Wie gross ist das Volumen einer körperlichen Zone, welche durch einen grössten Kreis der zugehörigen Kugel halbirt wird, wenn der Radius der Kugel gleich r und der Centriwinkel des Sectors, dessen Bogen durch Rotation um den betreffenden

Kugeldurchmesser die krumme Oberfläche der Zone beschreibt, gleich α ist? $r = 6{,}05588$, $\alpha = 45^0\ 12'\ 44''$.

74. Zwei gerade Kegel, deren gemeinschaftliche Axe ein Radius, und deren Spitze der Mittelpunkt einer Kugel ist, haben bezüglich die Winkel α und β an der Spitze ihrer Axenschnitte; der Kugelradius sei gleich r. Wie gross ist die körperliche Zone, welche zwischen den Durchschnittsflächen der beiden Kegel und der Kugel liegt? $\alpha = 108^0\ 0'\ 40''$, $\beta = 43^0\ 0'\ 30''$, $r = 5{,}75572$.

75. Einer körperlichen Kugelzone sei ein gerader abgestumpfter Kegel einbeschrieben, dessen Grundflächen die Endflächen der Zone sind. Das Volumen des Kegelstumpfs sei gleich V, die Seitenlinien desselben seien gegen die grössere Grundfläche unter dem Winkel α geneigt, seine Höhe gleich h. Man berechne das Volumen der Zone. $V = 298{,}95$, $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''{,}4$, $h = 4$.

76. Ein gerader Kegel, von welchem die Höhe und der Winkel zwischen Höhe und Seitenlinie (letzterer kleiner als 45^0) gegeben sind, werde von der Kugel geschnitten, für welche die Grundfläche des Kegels ein grösster Kreis ist. Man soll das Volumen des ringförmigen Körpers zwischen Kegelmantel und Kugelfläche berechnen.

§. 28. Sonstige Theile der Kugel.

α 1. Den Inhalt des von einem Kugelzweieck und den Ebenen der zugehörigen grössten Schnittkreise begrenzten Körpers aus dem Radius r der Kugel und dem Centriwinkel α des Zweiecks zu berechnen für $r = 6{,}7477$, $\alpha = 12^0\ 15'\ 7''$.

2. Man berechne umgekehrt den Radius der Kugel aus dem Volumen V des einem Kugelzweieck zugehörigen Theils der Kugel und seinem Centriwinkel α. $V = 0{,}147917$, $\alpha = 12^0\ 42'\ 45''$.

3. Ebenso α aus V und r. $V = 18{,}8491$, $r = 3$.

4. Den Inhalt eines durch ein sphärisches Dreieck (im engeren Sinn) und die Ebenen der zugehörigen Ecke begrenzten Körpers aus dem Kugelradius r und den Winkeln α, β, γ des Dreiecks zu berechnen. $r = 8{,}5276$, $\alpha = 57^0\ 12'\ 15''$, $\beta = 99^0\ 8'\ 10''$, $\gamma = 43^0\ 12'\ 4''$.

5. Ebenso für ein sphärisches Vier- (oder n-)Eck.

6. Wie gross ist derjenige Theil einer einem regelmässigen Tetraëder mit der Kante a umbeschriebenen Kugel, welcher von drei erweiterten Tetraëderflächen und dem zwischen denselben liegenden Theil der Kugelfläche begrenzt wird? $a = 20$.

7. Ein Theil einer Kugelfläche, dessen Inhalt gleich F ist, sei auf derselben durch eine beliebige in sich zurückkehrende Linie begrenzt. Eine Gerade bewege sich so, dass sie immer durch den Mittelpunkt der Kugel und nach und nach durch alle Punkte jener krummen Linie geht. Man berechne das Volumen des hierdurch ausgeschnittenen Theiles der Kugel, wenn der Radius derselben gleich r ist.

8. Drei gleiche Kugeln, deren Radien gleich r sind, berühren sich gegenseitig; eine vierte hat ihren Mittelpunkt in der Ebene der Mittelpunkte der drei ersteren, und die Berührungspunkte von diesen liegen auf ihrer Oberfläche. Wie gross ist derjenige Theil der vierten Kugel, welchen sie mit den drei ersten nicht gemeinschaftlich hat?

9. In einem Kreis soll ein Sector construirt werden, so β dass der durch seine Rotation um den zu seiner Sehne parallelen Durchmesser entstehende Körper $\frac{m}{n}$ der durch die Rotation des ganzen Kreises entstehenden Kugel betrage. Wie gross ist der Centriwinkel des Sectors? $\frac{m}{n} = \frac{43}{50}$. — Wie muss sich ferner der Flächeninhalt des Sectors zu dem des ganzen Kreises verhalten, wenn $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ sein soll?

10. Ebenso, wie in voriger Aufgabe, wenn statt des Sectors das zu ihm gehörige Segment rotirt, für $m : n = 1 : 8$. Wie verhält sich in diesem Fall das Volumen des von dem Segment beschriebenen Körpers zu dem Volumen des gleichzeitig von dem zugehörigen Sector beschriebenen?

11. Ein Kreissector, dessen Radius gleich r und dessen Centriwinkel gleich α ist, drehe sich um den zu der Halbirungslinie des Centriwinkels senkrechten Durchmesser des Kreises und zwar so lange, bis die Ebene des Sectors mit ihrer ursprünglichen Lage den Winkel β bildet. Man berechne das Volumen des von dem Sector beschriebenen Körpers. $r = 31{,}2938$, $\alpha = 71^0\,20'$, $\beta = 24^0$.

12. Von einem sphärischen Dreieck seien die Winkel α, β, γ und der Kugelradius gegeben; man berechne das Volumen des von der Fläche des Dreiecks, der Ebene, welche durch die Sehnen seiner Seiten bestimmt ist, und den durch je eine Seite und die zu ihr gehörige Sehne gehenden Ebenen begrenzten Körpers. $\alpha = 103^0\ 7'\ 27'',6$, $\beta = 23^0\ 22'\ 16'',8$, $\gamma = 70^0\ 17'\ 32'',4$, $r = 32\frac{1}{4}$.

13. Ein sphärisches Dreieck habe die Winkel α, β, γ, der Radius seiner Kugel sei doppelt so gross als der Radius einer derselben concentrischen Kugel, auf welcher die Ebenen der ihm zugehörigen Ecke ein sphärisches Dreieck bestimmen, dessen dem Winkel α gegenüberliegende Sehne gleich a ist. Man berechne das Volumen des von den Ebenen der Ecke, der Fläche des ursprünglichen sphärischen und der Ebene des zu dem anderen gehörigen Sehnen-Dreiecks eingeschlossenen Körpers. $\alpha = 60^0\ 12'\ 24'',8$, $\beta = 58^0\ 16'\ 32'',0$, $\gamma = 62^0\ 6'\ 0'',0$, $a = 52$.

14. In einen grössten Kreis einer Kugel, deren Radius gleich r ist, sei ein Dreieck mit den Winkeln α, β construirt, und durch jede Seite dieses Dreiecks sei ein zu der Ebene jenes grössten Kreises senkrechter Schnittkreis der Kugel construirt. Man berechne das Volumen des zwischen den Ebenen dieser drei Schnittkreise liegenden Stückes der Kugel. $r = 22{,}8537$, $\alpha = 36^0\ 52'\ 10'',7$, $\beta = 53^0\ 7'\ 49'',3$.

15. Durch eine ausserhalb einer Kugel liegende Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkt der ersteren gleich a gegeben ist, sind zwei die Kugel schneidende, sowie eine dritte, durch den Mittelpunkt gehende Ebene gelegt. Die letztere Ebene bildet mit den beiden ersteren bezüglich die Neigungswinkel α und β; der Radius der Kugel ist gleich r. Wie gross ist das zwischen den beiden ersteren Ebenen liegende Stück des Kugelkörpers?

§. 29. Das Prismatoid.

1. Lehrsatz: Jedes Prismatoid ist seinem Volumen nach zwischen zwei Prismen enthalten, welche mit ihm gleiche Höhen haben, und von denen das eine das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen, das andere die mittlere Durchschnittsfläche des Prismatoids zur Grundfläche hat. Setzt man eins dieser Prismen für das Prismatoid, so ist der Fehler im ersten Fall doppelt so gross als im zweiten.

Zusatz 1: Das erste Prisma ist grösser oder kleiner als das Prismatoid, je nachdem die mittlere Durchschnittsfläche D kleiner oder grösser als das arithmetische Mittel M der Grundflächen ist. Ist $M = D$, so sind beide Prismen gleich dem Prismatoid.

Zusatz 2: Ist V das Volumen des Prismatoids, V' das des ersten, V'' das des zweiten Prismas, so ist $V = \frac{1}{3}(V' + 2V'')$.

2. Ein Balken von Tannenholz hat zur unteren Grundfläche ein Quadrat dessen Seite $a = 84^{cm}$, und zur oberen Grundfläche ein Quadrat, dessen Seite $b = 24^{cm}$ lang ist. Die Höhe beträgt $2^{m},88$. Wieviel bezahlt man zu viel oder zu wenig, wenn man das Volumen des Balkens als ein Prisma von gleicher Höhe berechnet, dessen Grundfläche gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grundflächen oder gleich der mittleren Durchschnittsfläche des Balkens ist, und wenn der Kubikmeter Tannenholz 24 Mark kostet?

3. Den Kubikinhalt eines dreiseitigen Obelisken aus der Höhe a und der Grundlinie b der einen, den entsprechenden Linien a_1, b_1 der anderen Grundfläche und der Höhe h des Körpers zu berechnen. Welche Beziehung muss zwischen a, a_1, b, b_1 bestehen? Zahlenbeispiele: α) $a = 15^{cm}$, $a_1 = 9^{cm}$, $b = 21^{cm}$, $b_1 = 12\frac{3}{5}^{cm}$, $h = 10^{cm}$. β) $a = 0{,}236$, $a_1 = 0{,}058$, $b = 0{,}354$, $h = 1{,}224$. (3 Decimalen.) Obelisk.

4. Den Kubikinhalt eines Ponton, d. i. eines Obelisken mit rechteckigen Grundflächen, zu berechnen aus den Längen a, a_1, den Breiten b, b_1 der Grundflächen und der Höhe h des Körpers. α) $a = 9\frac{1}{2}$, $a_1 = 5\frac{1}{2}$, $b = 7\frac{3}{4}$, $b_1 = 11\frac{1}{4}$, $h = 8$; β) $a = 31{,}426$, $a_1 = 29{,}804$, $b = 54{,}159$, $b_1 = 17{,}327$, $h = 50$.

5. Den Rauminhalt eines Obelisken mit quadratischen Grundflächen aus seiner Höhe h und den Seiten a, a_1 der Grundflächen zu berechnen. α) $a = 4$, $a_1 = 0{,}4$, $h = 25$; β) $a = 9$, $a_1 = 6$, $h = 92$.

6. Das Volumen eines Obelisken, dessen Grundflächen Trapeze sind, zu bestimmen, wenn die Mittellinien der letzteren bezüglich gleich a und a_1, ihre Höhen entsprechend gleich b und b_1 sind, und die Höhe des Körpers gleich h ist. α) $a = 15\frac{1}{2}$, $a_1 = 13$, $b = 5\frac{1}{2}$, $b_1 = 4$, $h = 25$; β) $a = 2$, $a_1 = 0{,}8$, $b = 7{,}2$, $b_1 = 1{,}2$, $h = 10{,}5$.

Anmerkung: Sind m und m_1, n und n_1 bezüglich die parallelen Seiten der Grundflächen, so muss $(m - n) : (m_1 - n_1) = b : b_1$ sein.

7. Aus einer Kugel mit dem Radius r sei eine körperliche Zone so herausgeschnitten, dass der Kugelmittelpunkt zwischen den Endflächen liegt und von denselben bezüglich die Entfernungen m und n hat. In jede der beiden Endflächen ist ein Rechteck beschrieben, dessen Seiten sich wie 1 : 2 zu einander verhalten, jedoch so, dass die kürzeren Seiten des einen Rechtecks parallel zu den längeren Seiten des anderen sind. Diese Rechtecke sind die Endflächen eines Obelisken, dessen Oberfläche und Volumen berechnet werden sollen. $r = 5$, $m = 3$, $n = 4$.

8. Zu beweisen: Sind in einem Obelisken, dessen Grundflächen Rechtecke sind, zwei homologe Seiten dieser Grundflächen gleichgross, so ist der Obelisk gleich jedem der beiden Prismen, welche mit ihm gleiche Höhe haben, und bei denen die Grundflächen bezüglich gleich der mittleren Durchschnittsfigur oder gleich dem arithmetischen Mittel der Grundflächen sind.

9. Die eine Grundfläche eines Obelisken sei ein regelmässiges Sechseck mit der Seite a, die andere ein Sechseck, welches aus einem dem ersteren congruenten Sechseck durch zwei gerade Linien herausgeschnitten wird, die einer durch den Mittelpunkt desselben gehenden Diagonale parallel sind und die an diese Diagonale stossenden Seiten halbiren. Die Höhe des Körpers sei gleich h gegeben. Man berechne das Volumen des Obelisken.

10. Wird ein Parallelepipedon durch eine zur Grundfläche nicht parallele Ebene durchschnitten, so entsteht ein Theilkörper, welcher als ein vierseitiger Obelisk betrachtet werden kann, dessen Grundflächen Trapeze oder Parallelogramme sind. Man soll das Volumen eines solchen schief abgeschnittenen Stumpfs eines Parallelepipedon aus den Längen der stehengebliebenen Theile der vier Seitenkanten und dem Flächeninhalt eines zu den Seitenkanten senkrechten Schnitts des Parallelepipedon berechnen.

Pyramidenstumpf.

11. Die Formel für das Volumen eines Pyramidenstumpfs aus derjenigen für das Prismatoid abzuleiten und zu beweisen, dass die mittlere Durchschnittsfläche des Pyramidenstumpfs immer kleiner als das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen, und zwar gleich dem arithmetischen Mittel aus dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel der beiden Grundflächen ist.

12. Das Volumen eines Pyramidenstumpfs aus der Höhe h, einer Grundfläche G und dem Verhältniss einer Seite dieser Grundfläche zur homologen Seite der anderen, $m : n$, zu berechnen.

13. Den Flächeninhalt der mittleren Durchschnittsfigur eines Pyramidenstumpfs zu berechnen, welcher einem Prisma von gleicher Höhe und der gegebenen Grundfläche F an Volumen gleich ist, und dessen Grundflächen sich zu einander wie m zu n verhalten. $F = 19\ \square^{cm}$, $m : n = 9 : 4$.

Keil oder Sphenisk.

14. Ein dreiseitiges Prisma sei durch eine zu seiner Grundfläche nicht parallele Ebene abgestumpft. Man kann den hierdurch entstandenen Körper als einen Obelisken betrachten, dessen untere Grundfläche eine der Seitenflächen des Prismas, und dessen obere Grundfläche auf eine Kante reducirt ist. Man beweise hiernach, dass der Kubikinhalt des dreiseitigen prismatischen Abschnitts gleich $\frac{1}{3}(a + b + c)\ F$ ist, wenn a, b, c die Längen der parallelen Kanten sind und F den Inhalt einer zu denselben senkrechten Schnittfigur bedeutet. — Wie kann man hiernach den Inhalt eines mehrseitigen prismatischen Abschnitts finden?

15. Ein keilförmiger Körper habe zur Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a, b und zu Seitenflächen zwei den kürzeren Grundkanten (b) anliegende congruente gleichschenkelige Dreiecke und zwei den längeren Grundkanten (a) anliegende congruente Trapeze, welche in einer der Grundfläche parallelen Kante zusammenstossen, deren Länge gleich c ist. Die Höhe eines jeden der Seiten-Trapeze ist gleich d. Man berechne das Volumen des Keils. $a = 2{,}23$, $b = 0{,}46$, $c = 8{,}04$, $d = 2{,}65$. (Vergl. auch 14.)

16. Zwei gerade, regelmässig-sechsseitige Pyramiden von gleicher Höhe und gleichen Grundflächen stehen so auf derselben Ebene, dass ihre Grundflächen mit je einem Eckpunkt an einander stossen, und zwei parallele Seiten der einen in den Verlängerungen entsprechender Seiten der anderen liegen. Durch jede dieser Seiten und die beiden Spitzen der Pyramiden lässt sich eine Ebene legen, und diese Ebenen schliessen mit je zwei äusseren Seitenflächen der beiden Pyramiden und der Ebene der Grundflächen einen Körper ein, dessen Volumen aus der Grundkante a und der Höhe h einer jener Pyramiden berechnet werden soll.

17. Ein Prismatoid habe zur Grundfläche ein Quadrat, dessen Seite gleich a ist, zu Seitenflächen vier auf je einer Seite dieses Quadrats als Grundlinie in zur Grundfläche senkrechten Ebenen aufstehende gleichschenkelige Dreiecke, deren Schenkel gleich b sind, und acht congruente rechtwinkelige Dreiecke, von denen je zwei ihre Spitze in einem Eckpunkt des Quadrats haben, während

die acht Grundlinien vereinigt zwei den Quadratseiten gleiche, einander rechtwinkelig schneidende gerade Linien bilden. Man berechne das Volumen dieses Körpers.

18. Auf der Ebene eines Rechtecks, dessen Seiten a, b gegeben sind, seien in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten senkrechte Gerade von gleicher Länge c errichtet, und die Endpunkte dieser Geraden seien mit einander und mit den beiden anderen Eckpunkten des Rechtecks verbunden. Man berechne das Volumen des Keils, dessen Kanten diese Verbindungslinien und die Seiten des Rechtecks sind. Welches Resultat erhält man insbesondere, wenn die Grundfläche ein Quadrat ist, und die Senkrechten c gleich der Seite a dieses Quadrates sind?

19. Durch ein regelmässiges Oktaëder sei ein ebener Schnitt gelegt, welcher durch zwei einander diametral gegenüberliegende Eckpunkte geht und zwei parallele Kanten halbirt. Man kann die hierdurch entstehenden Theile des Oktaëders als Keile ansehen, deren Grundfläche die Schnittfläche ist. Man berechne das Volumen eines solchen Theiles nach der Formel für das Prismatoid aus der Kante a des Oktaëders.

20. Die Grundfläche eines Keils, dessen Höhe gleich h ist, sei ein Rhombus, dessen Diagonalen bezüglich gleich a und b sind. Die Schneide sei der ersteren Diagonale parallel und gleich c. Man berechne das Volumen.

21. Zieht man in zwei einander parallelen Grenzflächen eines Parallelepipedons je eine Diagonale, so dass die beiden Diagonalen einander kreuzen, so können die Endpunkte derselben als Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide angesehen werden, die zugleich als ein Prismatoid betrachtet werden kann, dessen beide Grundflächen auf Schneiden, nämlich auf jene Diagonalen reducirt sind. Man berechne das Volumen dieses Körpers nach der Formel für das Prismatoid. Gegeben sei das Volumen des Parallelepipedons,

Antiprisma. 22. Jedes regelmässige Oktaëder kann als ein Prismatoid angesehen werden, dessen Grund- und Seitenflächen sämmtlich congruente gleichseitige Dreiecke sind. Welche Formel erhält man hiernach für das Volumen eines solchen Körpers?

23. Die Ebenen zweier congruenten gleichseitigen Dreiecke, deren Seiten gleich a sind, seien einander in einem Abstande gleich h parallel, die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Dreiecke stehe senkrecht zu ihren Ebenen, jede Seite des einen

sei einer Seite des anderen parallel, liege aber vom Mittelpunkt aus nach der entgegengesetzten Richtung (der durch den Mittelpunkt gehenden, zu ihr senkrechten Linie). Durch je einen Eckpunkt eines der Dreiecke und die seiner Gegenseite parallele des anderen sei eine Ebene gelegt, so dass man sechs dreieckige Seitenflächen erhält. Man berechne das Volumen des so entstandenen oktaëderartigen Körpers (regelmässigen dreiseitigen Antiprismas). $a = 28{,}5$, $h = 1{,}68465$.

24. Die Grundflächen eines Prismatoids seien congruente Quadrate mit der Seite a, deren Seiten nicht parallel laufen; die Seitenflächen seien acht gleichschenkelige Dreiecke; die Höhe des Prismatoids sei gleich h gegeben. Man berechne das Volumen des Körpers (regelmässigen, vierseitigen Antiprismas).

25. Schneidet man von einem regelmässigen Ikosaëder zwei fünfseitige Pyramiden ab, welche durch die in zwei diametral gegenüberliegenden Eckpunkten aneinanderstossenden Flächen bestimmt werden, so entsteht ein von zwei congruenten regelmässigen Fünfecken und zehn gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper. Man berechne seinen Kubikinhalt aus der Kante a mittelst der Regel für das Prismatoid.

Anmerkung: Der entstandene Körper ist ein regelmässiges fünfseitiges Antiprisma und zugleich ein Archimedischer (d. h. ein von regelmässigen, nicht sämmtlich congruenten Figuren, die in congruenten Ecken zusammenstossen, begrenzter) Körper.

26. Die Grundflächen eines Antiprisma von der Höhe h seien Rechtecke mit den Seiten a und b; eine Seite (a) des einen derselben sei einer Diagonale des anderen parallel. Man berechne sein Volumen.

Antiobelisk.

27. Die beiden Grundflächen eines Prismatoids von der Höhe h seien Quadrate, die Seitenflächen gleichschenkelige Dreiecke; die Seiten der oberen Grundfläche seien bezüglich den Diagonalen der unteren parallel und halb so lang als diese Diagonalen; die Seite der unteren Grundfläche sei gleich a gegeben. Man berechne das Volumen des Körpers.

28. Das Volumen eines Prismatoids zu berechnen, welches ebenso beschaffen ist, wie das in der vorigen Aufgabe, jedoch mit dem Unterschied, dass die Seite der oberen Grundfläche a) halb so gross als die Seite der unteren, b) von gegebener Länge b ist. $a = 10$, $b = 7{,}07107$, $h = 6$.

29. Die eine Grundfläche eines Prismatoids von der Höhe h

sei ein Rhombus, die andere ein Rechteck, dessen Seiten bezüglich parallel den Diagonalen des Rhombus, halb so lang als diese, und zwar gleich a und b sind. Die Seitenflächen mögen als gleichschenkelige Dreiecke vorausgesetzt werden. Man berechne den Rauminhalt des Körpers.

Prismatoid im Allgemeinen.

30. Von einer geraden abgestumpften Pyramide mit quadratischen Endflächen seien durch vier Ebenen, von denen jede durch einen Eckpunkt der kleineren Endfläche geht, vier dreiseitige Pyramiden mit gleichen und gleichschenkeligen Grundflächen abgeschnitten, so dass ein prismatoidischer Körper entsteht, dessen untere Grundfläche ein Achteck mit gleichen Winkeln und abwechselnd gleichen Seiten ist. Die Grundkanten, welche die Ecken des ursprünglichen Quadrats abstumpfen, seien gleich b, die anderen Seiten des Achtecks gleich a, die obere Grundkante gleich c, die Höhe des Körpers gleich h. Man berechne das Volumen des letzteren. $a = 9$, $b = 2{,}82846$, $c = 3$, $h = 12$.

31. Ein gerades Parallelepipedon ist durch eine Ebene, welche durch die beiden Endpunkte einer Diagonalaxe geht, durchschnitten. Es entsteht hierdurch ein von zwei Dreiecken, zwei Trapezen, einem Parallelogramm und der Schnittebene begrenzter keilähnlicher Körper, der als ein Prismatoid betrachtet werden kann, mit einem Trapez und einem Dreieck als Grundflächen. Aus der Höhe h dieses Prismatoids, der Grundlinie a und der Höhe b der dreieckigen und den parallelen Seiten c, d der trapezförmigen Grundfläche soll das Volumen dieses Körpers berechnet werden. $a = 12$, $b = c - d = 6$, $c = 12$, $d = 6$, $h = 15$.

32. Denkt man sich die obere Grundfläche einer geraden, regelmässig-sechsseitigen Säule mit der Grundkante a und der Höhe h durch Ansetzen von je einem Trapez an jede Seite vergrössert, der Art, dass diese Trapeze congruent und ihre nicht parallelen Seiten jedesmal Verlängerungen anliegender Sechseckseiten und halb so lang als diese sind, so kann das entstandene Achtzehneck als obere Endfläche eines Prismatoids dienen, dessen untere Endfläche die parallele Grundfläche des Prismas ist, und dessen Seitenflächen sechs Trapeze, sowie zwölf Dreiecke sind. Man berechne das Volumen dieses Körpers.

33. Eine gerade, abgestumpfte, regelmässig-sechsseitige Pyramide mit den Grundkanten a, b und der Seitenkante c sei

gegeben. Durch Verbindung der abwechselnden Eckpunkte der grösseren Grundfläche entstehen in dieser zwei gleichseitige Dreiecke, welche zusammen eine zwölfeckige sternförmige Figur bilden, die als die eine Grundfläche eines Prismatoids diene. Die Eckpunkte ihrer einspringenden Winkel sind mit den Endpunkten je einer entsprechenden Kante der oberen Grundfläche des Pyramidenstumpfes (welche zugleich die obere des Prismatoids sein soll) verbunden, und durch die betreffenden Ebenen sind achtzehn Dreiecke als Seitenflächen construirt. Man berechne das Volumen des Prismatoids.

Krummflächige Körper.

34. Das Volumen eines abgestumpften Kegels aus den Radien r, r_1 und der Höhe h nach der Formel für das Prismatoid zu berechnen. $r = 9$, $r_1 = 6$, $h = 22{,}6$.

35. Man beweise: Jede Kugel ist an Inhalt gleich einem Prismatoid, dessen beide Grundflächen gleich Null zu setzen sind, dessen mittlere Durchschnittsfläche gleich einem grössten Kreise, und dessen Höhe gleich einem Durchmesser der Kugel ist.

Ein solches Prismatoid lässt sich als ein Tetraëder construiren, in welchem zwei einander kreuzende Kanten an Stelle der Grundflächen angenommen werden. Man berechne die Längen dieser beiden Kanten, sowie die Längen der vier Seitenkanten aus dem Kugelradius r unter der Voraussetzung, dass die mittlere Durchschnittsfläche ein Quadrat ist und die Seitenkanten gleichlang sind.

Anmerkung. Besteht ein Körper aus zwei Prismatoiden, so dass die obere Grundfläche des einen zugleich die untere Grundfläche des anderen ist, und hat der ganze Körper die Eigenschaft, dass der Inhalt jeder der Grundflächen, sowie jeder denselben parallelen Schnittfigur aus dem Abstand ihrer Ebene von irgend einem festen Punkte durch eine algebraische Gleichung berechnet werden kann, welche in Beziehung auf diesen Abstand als Unbekannte den dritten Grad nicht übersteigt, so ist der ganze Körper an Inhalt gleich einem einzigen Prismatoid von gleicher Höhe mit demselben, dessen Grundflächen die beiden äusseren Grundflächen sind. — Für die nachstehenden Anwendungen dieses Satzes genügt es, denselben unter der Voraussetzung zu beweisen, dass jene Gleichung den zweiten Grad nicht übersteige. Man setze also voraus, wenn x der Abstand irgend einer der oberen oder unteren Grundfläche parallelen Schnittebene vom Inhalt D von dieser Grundfläche ist, dass stets

$$D = \alpha + \beta x + \gamma x^2, \text{ bezw. } D = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

gesetzt werden könne, also z. B. dass

$g_1 = \alpha$; $g_2 = \alpha + \beta h_1 + \gamma h_1^2$, $D_1 = \alpha + \frac{1}{2}\beta h_1 + \frac{1}{4}\gamma h_1^2$, u. s. w. sei.

Ist der Satz bewiesen, so lässt sich derselbe leicht auf Summen von mehr als zwei Prismatoiden der gedachten Art ausdehnen, und nimmt man zuletzt die Anzahl dieser einzelnen Prismatoide unendlich gross, ihre Höhen unendlich klein an, so gelangt man auch zu krumm-

flächigen Körpern, deren Volumina nach der Regel für das Prismatoid berechnet werden können.

Jeder solche, von zwei ebenen und parallelen Figuren (die sich auch auf gerade Linien oder Punkte reduciren können) als Grundflächen und von ebenen oder krummen Flächen als Seitenflächen begrenzte Körper, welcher die Eigenschaft hat, dass der Flächeninhalt jeder den Grundflächen parallelen Schnittfigur eine den dritten Grad nicht übersteigende Function des Abstands ihrer Fläche von einem beliebigen festen Punkte ist, wird ein Simpson'scher Körper genannt. Der Satz, dass das Volumen eines solchen nach der für das Prismatoid geltenden Formel berechnet werden kann, heisst die Simpson'sche Regel und wurde zuerst von Newton als eine allgemeine Methode zur näherungsweisen Berechnung des Volumens beliebiger krummflächiger Körper angegeben.

Man kann leicht zeigen, dass die Kugel zu diesen Simpson'schen Körpern gehört und so die bekannte Formel für den Kubikinhalt der Kugel aus derjenigen für das Prismatoid ableiten. Das Gleiche gilt für die folgenden Aufgaben.

36. Man zeige, dass jeder Kugelabschnitt zu den in der Aufgabe 35, Anmerkung, erwähnten Simpson'schen Körpern gehört, und berechne hiernach seinen Kubikinhalt a) aus der Höhe h und dem Kugelradius r, b) aus der Höhe h und dem Radius ϱ der ebenen Grenzfläche.

37. Ebenso für eine körperliche Kugelzone, wenn die Höhe und die Radien der beiden ebenen Grenzflächen gegeben sind.

38. Welche Formel erhält man für den Rauminhalt eines Fasses aus dem Radius r seiner congruenten Grundflächen, dem Radius R seiner mittleren Durchschnittsfläche und der Höhe h unter der Annahme, dass dasselbe zu den Simpson'schen Körpern gehöre?

Diese Formel wurde im Jahre 1765 von Lambert angegeben.

39. Ein gerader Cylinder sei durch eine Ebene durchschnitten, welche die Grundfläche in einem Durchmesser schneide. Auf diese Weise entsteht ein Körper, welcher von der Schnittebene, einer Hälfte der Grundfläche und einem Theil des Cylindermantels vollständig begrenzt wird. (Cylinderhuf, Klauen.) Man zeige, dass derselbe als ein Simpson'scher Körper betrachtet werden kann, dessen mittlere Durchschnittsfläche in einer durch die Cylinderaxe gehenden und zu der Durchschnittslinie der beiden ebenen Grenzflächen senkrechten Ebene liegt, und dessen Grundflächen sich auf Punkte reduciren. Man berechne hiernach das Volumen eines solchen Körpers aus dem Radius der Grundfläche des Cylinders und der längsten Seitenlinie des betreffenden Stücks des Cylindermantels.

40. Durch einen Durchmesser der einen Grundfläche eines

geraden Cylinders und je einen Endpunkt des denselben rechtwinkelig kreuzenden Durchmessers der anderen Grundfläche sind ebene Schnitte gelegt; man berechne aus den Dimensionen des Cylinders die Volumina der entstandenen Theile desselben. (Vergl. Aufg. 39.)

Anmerkung. Die zahlreichen Anwendungen, welche die Simpson'sche Regel auf Rotationsellipsoide, Rotationsparaboloide und Rotationshyperboloide u. dgl. m. zu machen gestattet, werden hier, als die Grenzen der Elementarmathematik im engeren Sinne übersteigend, übergangen.

41. Das Volumen eines Obelisken (im engeren Sinne) zu β berechnen, dessen Grundflächen Vierecke mit bezüglich den Seiten a, b, c, d und a', b', c', d' sind, wenn ausserdem die Winkel $(ab) = \alpha$, $(cd) = \beta$ und die Höhe h des Körpers bekannt sind. $a = 182$, $b = 169$, $c = 210$, $d = 225$, $a' = 40$, $b' = 13$, $c' = 15$, $d' = 44$, $\alpha = 67^0\,22'\,48'',5$, $\beta = 53^0\,7'\,48'',4$, $h = 30$. Können die gegebenen Grössen sämmtlich willkürlich angenommen werden?

42. Ein Sechseck bestehe aus einem Rechteck mit den Seiten a, b und aus zwei an die kleineren Seiten (b) desselben als Grundlinien angelegten gleichschenkeligen Dreiecken, deren Winkel an der Spitze beide gleich α sind. Durch eine ausserhalb der Ebene des Rechtecks liegende, seinen längeren Seiten parallele und gleiche Gerade, und durch jede dieser Seiten sei je eine Ebene gelegt, deren Neigungswinkel gegen die Fläche des Rechtecks beide gleich β gegeben sind, und durch Verbindung der entsprechenden Endpunkte der parallelen Linien seien zwei rechteckige Seitenflächen entstanden. Durch die übrigen Seiten des Sechsecks und den je benachbarten Endpunkt der ausserhalb seiner Fläche liegenden Kante seien Ebenen gelegt, durch welche sonach vier Dreiecke entstehen. Man berechne das Volumen des so begrenzten Körpers. $a = 66{,}5546$, $b = 21{,}7$, $\alpha = 43^0\,6'\,30''$, $\beta = 26^0\,35'\,10''$.

§. 30. Einfache Rotationskörper.

Man soll die Oberfläche und den Kubikinhalt eines Körpers α berechnen, welcher durch Rotation einer geradlinigen Figur um eine in ihrer Ebene liegende Axe entsteht, und zwar für folgende Fälle:

1. Die rotirende Fläche sei ein gleichseitiges Dreieck, die

Rotationsaxe eine seiner Seiten. Gegeben ist die Seite a des Dreiecks. $a = 3{,}16921$.

2. Es rotire ein gleichseitiges Dreieck um eine ausserhalb desselben liegende und einer seiner Seiten in dem Abstand b parallele Axe. Die Seite des Dreiecks sei gleich a. Zwei Fälle. $a = 1{,}85335$, $b = 1{,}60503$.

3. Man beweise, dass der Kubikinhalt der in den beiden vorigen Aufgaben behandelten Körper gleich dem Product aus dem Flächeninhalt des Dreiecks in die Länge derjenigen Kreislinie ist, welche der Schwerpunkt des letzteren bei der Rotation beschreibt.

4. Die rotirende Fläche sei ein Dreieck, die Axe liege ausserhalb desselben. Gegeben seien **a**) die Abstände der Eckpunkte des Dreiecks von der Axe und die auf letzterer durch die betreffenden Senkrechten gebildeten Abschnitte, oder **b**) zwei Seiten des Dreiecks und die Abstände seiner Eckpunkte von der Axe. Man berechne ferner den Kubikinhalt des Rotationskörpers **c**) aus dem Flächeninhalt des Dreiecks und den Abständen seiner Eckpunkte von der Axe und beweise endlich die Gültigkeit des in Nr. 3 ausgesprochenen Satzes auch für diesen allgemeineren Fall. Welche Form erhalten die Resultate, wenn die Axe einer Seite parallel ist; welche, wenn sie mit einer Seite zusammenfällt?

5. Ein spitzwinkeliges Dreieck mit den Seiten a, b, c kann um jede Seite als Axe gedreht werden. Dadurch entstehen drei verschiedene Doppelkegel. Man soll das Verhältniss der Oberflächen und das der Rauminhalte dieser Körper durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken.

6. Den Kubikinhalt des Körpers zu finden, welcher durch Rotation eines Parallelogramms um eine ausserhalb desselben liegende Axe entsteht. Gegeben sei der Flächeninhalt F des Parallelogramms und der Abstand a des Durchschnittspunktes seiner Diagonalen von der Drehungsaxe. $F = 79{,}577$, $a = 4$.

7. Ein Rechteck mit den Seiten a und b wird um eine Axe gedreht, welche parallel zu einer Diagonale durch einen Eckpunkt gelegt ist. Man soll die Oberfläche und das Volumen des entstandenen Rotationskörpers berechnen. $a = 20$, $b = 21$.

8. Ein regelmässiges Sechseck, dessen Seite gleich a gegeben ist, rotire um einen grossen Durchmesser. Der Kubikinhalt des entstehenden Körpers soll berechnet werden. $a = 6{,}33842$.

9. Ebenso, wenn die Drehungsaxe ein kleiner Durchmesser ist. $a = 2{,}8948$.

10. Ebenso, wenn die Axe durch den Mittelpunkt des Polygons geht und zwei parallele Seiten in dem Verhältniss $m : n$ theilt, und wenn blos die eine Hälfte des Sechsecks rotirt.

11. Man behandele die den Aufgaben 8 und 9 entsprechenden für ein regelmässiges Achteck.

12. Ein gleichseitiges Dreieck rotire um eine Axe, welche eine seiner Seiten halbirt und zu einer anderen senkrecht steht. Welche Gestalt hat der entstehende Rotationskörper, und wie gross sind seine Oberfläche und sein Volumen, wenn die Seite des Dreiecks gleich a gegeben ist, und der innerhalb des grösseren Körpertheils fallende kleinere als ausgehöhlt angesehen wird? — Gilt der in Aufgabe 3 für den Kubikinhalt aufgestellte Lehrsatz auch für diesen Fall?

13. Ebenso, wenn ein Quadrat um eine Axe rotirt, welche zwei aneinander liegende Seiten desselben halbirt.

14. Ein regelmässiges Sechseck mit der Seite a werde um eine seiner kleineren Diagonalen gedreht. Es entstehen dann zwei Rotationskörper, von denen der eine vollständig innerhalb des anderen liegt. Wie gross sind die Oberflächen beider Körper, und wie gross ist das Volumen des zwischen beiden Oberflächen liegenden Raumes?

15. Ein Dreieck durch eine mit einer Seite parallele Gerade so zu theilen, dass die durch Umdrehung der beiden Theile um jene Seite als Axe entstehenden Körper gleiche Rauminhalte haben. (Cubische Gleichung. Für das Verhältniss des Abstandes der Parallelen von der Drehungsaxe zur zugehörigen Höhe als Unbekannte erhält man leicht die Wurzel 2. Die beiden anderen Wurzeln sind für die Aufgabe nicht brauchbar, lassen sich jedoch auch leicht geometrisch deuten.)

16. Ein Dreieck durch eine von einem Eckpunkte ausgehende Transversale so zu theilen, dass die bei der Umdrehung der beiden Theile um eine ausserhalb des Dreiecks in seiner Ebene gegebene Axe erzeugten Körper gleiche Rauminhalte haben.

17. Durch einen Punkt auf einer Seite eines Dreiecks sei zu einer anderen Seite eine parallele Transversale gezogen, und die ganze Figur rotire um die erstere Seite. In welchem Verhältniss muss diese durch jenen Punkt getheilt werden, wenn der

durch die Rotation des ganzen Dreiecks beschriebene Körper sich zu dem von dem abgeschnittenen kleineren Dreieck erzeugten dem Rauminhalt nach wie $m : n$ verhalten soll? $m : n = 8 : 1$.

18. Ein regelmässiges Sechseck drehe sich um eine seiner Seiten; man soll die Oberfläche und das Volumen des Rotationskörpers aus der Seite a des Sechsecks berechnen.

19. Ein gleichschenkeliges Trapez, dessen Seiten bekannt sind, rotire um eine der nicht parallelen Seiten. Wie gross sind die Oberfläche und das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?

20. Ein Trapez rotire das eine Mal um die grössere, das andere Mal um die kleinere seiner parallelen Seiten; die Volumina der entstehenden Rotationskörper verhalten sich wie $m : n$. Wie verhalten sich die beiden parallelen Seiten zu einander? $m : n = 3 : 4$.

21. Ueber der Hypotenuse eines gleichschenkeligen und rechtwinkeligen Dreiecks sei nach Aussen ein Halbkreis sowie ein Quadrant beschrieben, dessen Mittelpunkt der Scheitel des rechten Winkels ist. Die entstandene Figur rotire um eine zu der Hypotenuse senkrechte, durch den Scheitel des rechten Winkels gehende Axe. Man berechne den Kubikinhalt des Rotationskörpers, welcher von der zwischen den beiden Kreisbogen liegenden Figur beschrieben wird. Gegeben sei die Hypotenuse a. $a = 3{,}8457$.

β 22. Von einem Dreieck seien zwei Seiten a, b und der von denselben eingeschlossene Winkel γ gegeben; es soll der Kubikinhalt desjenigen Körpers berechnet werden, welcher entsteht, wenn das Dreieck um die nicht gegebene dritte Seite als Drehungsaxe rotirt. $a = 6{,}29$, $b = 6{,}21$, $\gamma = 9^0\ 8'\ 52''{,}3$.

23. Von einem Dreieck sei eine Seite a nebst den Winkeln gegeben; man suche die Oberfläche und das Volumen des durch Rotation des Dreiecks um die gegebene Seite entstehenden Körpers. $a = 1{,}63527$, $\alpha = 50^0$, $\beta = 27^0$, $\gamma = 103^0$.

24. Ein Trapez, von dem die parallelen Seiten a, b, eine dritte Seite c und der Winkel α gegeben sind, welchen die letztere mit der grösseren a der parallelen Seiten bildet, drehe sich um diese Seite a. Man bestimme den Kubikinhalt des Rotationskörpers und den Flächeninhalt seiner Oberfläche. $a = 6$, $b = 2$, $c = 0{,}6$, $\alpha = 25^0\ 54'\ 50''{,}8$.

25. Ein Dreieck mit der Grundlinie a und den anliegenden

Winkeln β, γ werde durch eine in der Entfernung e von der Spitze mit der Grundlinie parallel gezogene Gerade durchschnitten. Wie gross ist der Rauminhalt, und wie gross die Oberfläche des Rotationskörpers, welchen das entstandene Trapez beschreibt, wenn es um die Seite a gedreht wird? $a = 4{,}4$, $\beta = 18^0\ 55'\ 28''{,}7$, $\gamma = 53^0\ 7'\ 48''{,}4$, $e = 1{,}06476$.

26. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a drehe sich um eine Axe, welche durch einen seiner Eckpunkte geht, ausserhalb desselben in seiner Ebene liegt und mit einer anliegenden Seite den Winkel α bildet. Die Oberfläche und das Volumen des Rotationskörpers sollen berechnet werden. $\alpha = 10^0$, $a = 6{,}2796$.

27. Ein rechtwinkeliges Dreieck rotire um eine Axe, welche auf der Hypotenuse in einem ihrer Endpunkte senkrecht steht. Der spitze Winkel, durch dessen Scheitel die Axe geht, sei gleich α und die Fläche des Dreiecks sei gleich F. Wie gross ist das Volumen des Umdrehungskörpers? $F = 103{,}74$, $\alpha = 49^0\ 33'\ 1''$.

28. In einem Dreieck ABC seien die Seiten $a = 75{,}6$, $b = 55{,}2$ und der eingeschlossene Winkel $\gamma = 43^0\ 22'$ gegeben. Das Dreieck rotire um eine durch den Scheitel C dieses Winkels gehende Gerade, welche der nach der Mitte der Seite a gezogenen Ecktransversale parallel ist. Man berechne die Oberfläche und das Volumen des Rotationskörpers.

29. Die drei Seiten eines Dreiecks sind bezüglich gleich a, b, c gegeben. Man bestimme die Oberfläche und das Volumen des durch dieses Dreieck erzeugten Rotationskörpers, wenn die Drehungsaxe durch seine Spitze geht und die gegenüberliegende Seite c auf ihrer Verlängerung in der Richtung über b unter dem Winkel δ schneidet. $a = 29{,}0687$, $b = 42{,}0119$, $c = 71{,}0067$, $\delta = 0^0\ 48'\ 24''{,}9$.

30. Ein regelmässiges Polygon rotire um eine ausserhalb desselben in seiner Ebene gegebene Axe. Man soll aus seinem Flächeninhalt und dem Abstand seines Mittelpunktes von der Axe den Kubikinhalt des Rotationskörpers berechnen.

Zur Auflösung zerlege man das Polygon durch seine grossen Radien in Dreiecke, berechne die Kubikinhalte der durch die einzelnen Dreiecke beschriebenen Körper und wende den Hilfssatz an: Der Abstand des Mittelpunktes eines regelmässigen Polygons von einer beliebigen Geraden ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Abständen seiner einzelnen Eckpunkte von derselben Geraden. Zum Beweise dieses Satzes ziehe man durch den Mittelpunkt die Parallele zu dieser Geraden und berechne die Längen der auf sie gefällten Senkrechten aus den grossen

Radien und den Winkeln derselben gegen die Axe unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen der Werthe für die auf verschiedenen Seiten der letzteren liegenden Perpendikel.

31. Man berechne in entsprechender Weise die Oberfläche des Rotationskörpers.

32. Den Kubikinhalt und die Oberfläche des durch Rotation eines Kreises um eine denselben nicht schneidende Axe (in seiner Ebene) entstehenden ringförmigen Körpers zu berechnen. Gegeben sei der Radius des Kreises und der Abstand seines Mittelpunktes von der Axe. Vergl. 30.

33. Ein Kreissector, dessen Centriwinkel gleich α, und dessen Radius gleich r ist, drehe sich um den zu der Sehne seines Bogens parallelen Durchmesser. Man berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt des Rotationskörpers. $\alpha = 41^0$, $r = 3{,}7922$.

34. Ebenso, wenn statt des Sectors das betreffende Segment rotirt. Insbesondere für $\alpha = 180^0$ oder 90^0 oder 60^0.

35. Die Oberfläche und den Kubikinhalt des durch Rotation eines Kreissegments mit dem Radius r und der Sehne s entstehenden Körpers zu berechnen, wenn die ausserhalb des Segments liegende Drehungsaxe ein gegen die Sehne unter einem gegebenen Winkel α geneigter Durchmesser desselben Kreises ist. Insbesondere, wenn der Bogen des Segments 90, 60 oder 45 Bogengrade enthält. Wie gestalten sich die Resultate dieser Aufgaben für $\alpha = 0$? Die Angabe des Radius ist für V überflüssig. Welcher Lehrsatz lässt sich daraus aufstellen?

36. Die in Aufgabe 21 beschriebene sichelförmige Figur drehe sich um eine durch den Scheitel des rechten Winkels gehende und der Hypotenuse parallele Axe; das Volumen des Rotationskörpers zu bestimmen.

37. Durch die Endpunkte A, B des Bogens ACB eines Kreissectors AMB, dessen Radius gleich r und dessen Centriwinkel gleich α gegeben ist, seien die Tangenten gezogen; dieselben mögen einander in einem Punkte D schneiden. Man berechne die Volumina der drei Körper, welche durch Umdrehung des Dreiecks AMB, des Segments ACB und der Figur $ADBC$ um den Halbmesser MA entstehen. In welchem Falle sind die beiden ersten Körper einander gleich, und wie verhält sich in diesem Falle das Volumen eines derselben zum Volumen des dritten und zum Volumen der ganzen Kugel?

Anhang.

§. 31. Maxima und Minima.

1. Den grössten und den kleinsten von allen denjenigen ebenen Schnitten eines geraden Kegels zu construiren, welche durch die Spitze und einen in der Grundfläche gegebenen Punkt gehen.

2. In einem schiefen Kegel soll der grösste und der kleinste ebene Schnitt bestimmt werden, welcher durch die Spitze geht und die Grundfläche in einer Geraden von gegebener Länge schneidet.

3. Den grössten aller ebenen Schnitte zu bestimmen, welchen man durch ein gegebenes regelmässiges Oktaëder parallel zu einer Seitenfläche desselben legen kann.

4. Durch die Endpunkte je dreier Kanten eines Würfels, welche von einem von zwei einander gegenüberliegenden Eckpunkten ausgehen, ist ein ebener Schnitt gelegt. Man soll von denjenigen Schnittfiguren des Würfels, welche zwischen den beiden so bestimmten Ebenen und parallel zu denselben construirt werden können, diejenige bestimmen, deren Flächeninhalt der grösste ist.

5. Von allen ebenen Schnitten eines regelmässigen Tetraëders, welche man durch dasselbe parallel zu gleichzeitig zwei Kanten legen kann, denjenigen zu bestimmen, welcher den grössten Flächeninhalt hat.

6. Unter allen vierseitigen Prismen, welche man einem gegebenen Cylinder einbeschreiben kann, dasjenige zu bestimmen, dessen Kubikinhalt ein Maximum ist.

7. Unter allen geraden Kegeln, deren gesammte Oberfläche gleich der Oberfläche einer Kugel von gegebenem Radius r ist, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen am grössten ist.

8. Wie gross ist der Rauminhalt des grössten aller geraden Kegel mit der Seitenlinie a?

9. Welcher unter allen geraden Cylindern von gegebener Oberfläche hat den grössten Kubikinhalt?

10. Unter allen geraden Cylindern von gegebenem Kubikinhalt denjenigen zu bestimmen, welcher die kleinste Oberfläche hat.

11. Denjenigen einer gegebenen Kugel einbeschriebenen Cylinder zu bestimmen, welcher den grössten Inhalt hat.

12. Welches Volumen hat das grösste gerade Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, und welches einer gegebenen Kugel einbeschrieben werden kann?

13. Wie gross sind der Radius, die Höhe und das Volumen des geraden Cylinders mit dem grössten Rauminhalt, wenn die Diagonale seines Axenschnitts die Länge d hat?

14. In eine gegebene Kugel einen geraden Kegel von möglichst grossem Kubikinhalt zu beschreiben.

15. Welches ist der Inhalt der grössten Pyramide mit quadratischer Grundfläche, welche sich einer Kugel mit dem Radius r einbeschreiben lässt?

16. Einer Halbkugel denjenigen abgestumpften Kegel einzubeschreiben, welcher den grössten Mantel hat.

17. Hat der grösste aller einer Kugel einbeschriebenen geraden Kegel auch von allen diesen Kegeln die grösste Gesammtoberfläche oder vielleicht den grössten Mantel?

18. Ein kegelförmiges Flüssigkeitsmass zu construiren, dessen Kubikinhalt gegeben ist, und dessen Oberfläche so klein als möglich sein soll, damit ein möglichst kleiner Theil der zu messenden Flüssigkeit durch Adhäsion verloren geht.

19. Ein gerades parallelepipedisches Flüssigkeitsmass mit quadratischer Grundfläche, welches $V = 4$ Kubikdecimeter fasst, hat eine möglichst kleine Wandungsoberfläche. Wie lang sind seine Grund- und seine Seitenkanten?

20. Es sollen V Kubikcentimeter Kupfer in die Form eines rechtwinkeligen Parallelepipedon von der Höhe h gegossen, und darauf soll dasselbe vergoldet werden. Wie muss man die Dimensionen der Grundfläche wählen, damit die Vergoldung möglichst billig werde, und wie theuer ist diese, wenn 1 Quadratcentimeter mit 20 Pfennigen berechnet wird? $V = 54$ Cubcm., $h = 6^{cm}$.

21. Um eine gegebene Kugel vom Radius r soll ein Kegel beschrieben werden, so dass sein Volumen oder sein Mantel oder seine Oberfläche so klein als möglich werde.

22. Von allen Kegeln, welche der einem regelmässigen Oktaëder mit der Kante a einbeschriebenen Kugel einbeschrieben sind, denjenigen zu bestimmen, welcher den grössten Mantel hat.

23. Um einen geraden Kegel, dessen Radius der Grundfläche gleich r, und dessen Höhe gleich h ist, sei ein zweiter Kegel beschrieben, so dass die Spitze des ersten der Mittelpunkt der

Grundfläche des zweiten, die Grundfläche des ersten ein Schnittkreis des zweiten und der Rauminhalt des zweiten ein Minimum ist. Wie gross ist dieser Inhalt?

24. Von welchem Punkte der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks muss man Perpendikel auf die Katheten desselben fällen, damit das so entstehende Rechteck bei der Rotation um eine der Katheten einen Cylinder von möglichst grossem Inhalt beschreibe?

25. Man bestimme zu Aufg. 24 den Punkt der Hypotenuse, für welchen der Cylinder **a**) einen möglichst grossen Mantel, oder **b**) eine möglichst grosse Gesammtoberfläche erhält.

26. In einen mit Flüssigkeit gefüllten gegebenen geraden Kegel werde ein regelmässig-sechsseitiges Prisma so eingetaucht, dass seine untere Grundfläche parallel mit der (horizontal, oben liegenden) Kegelbasis bleibe. Wie gross muss die Grundfläche dieses Prismas sein, und wie tief muss es eingetaucht werden, damit es so viel Wasser als möglich verdränge?

27. Auf der Centrallinie zweier gegebenen Kugeln soll ein Punkt so bestimmt werden, dass die Summe der beiden von ihm aus überblickten Calotten ein Maximum ist.

28. Aus einem Kreissector lässt sich ein Trichter bilden. Wie gross muss der Centriwinkel des Sectors gewählt werden, wenn der Inhalt des Trichters möglichst gross werden soll?

29. Von einer geraden quadratischen Pyramide ist die Höhe h und die Grundkante a gegeben; man soll in dieselbe eine die Seitenflächen berührende, die Grundfläche schneidende Kugel so legen, dass die in die Pyramide fallende Calotte ein Maximum ist.

Eine Auswahl von Aufgaben über Maxima und Minima, nebst Anleitung zu ihrer elementaren Behandlung findet man u. A. in „Martus, Maxima und Minima, Berlin 1861".

§. 32. Vermischte Aufgaben aus allen Gebieten.

1. Durch einen von drei gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Punkten eine Ebene zu legen, welche von den beiden anderen gegebene Abstände hat.

2. Eine Ebene zu construiren, welche von drei gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Punkten gegebene Abstände hat.

3. In der einen von zwei gegebenen sich kreuzenden Geraden

einen Punkt zu bestimmen, welcher von der anderen und von einem gegebenen Punkte gleichweit absteht.

4. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, welcher von einer gegebenen Ebene und einem gegebenen Punkte gleichweit absteht.

5. Eine Kugel zu construiren, welche durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt.

6. In jeder dreiseitigen Pyramide ist das Product der Sinus von drei nicht aneinander liegenden der Winkel, welche drei von einem Eckpunkt ausgehende Kanten mit den drei übrigen Kanten bilden, gleich dem Product der Sinus der drei anderen dieser Winkel.

7. Die Höhe einer dreiseitigen Pyramide aus den Längen ihrer sechs Kanten zu berechnen.

8. Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide aus den Längen ihrer Kanten zu berechnen.

9. Jede Ebene, welche durch die Halbirungspunkte zweier nicht aneinanderstossender Kanten einer dreiseitigen Pyramide gelegt wird, theilt die letztere in zwei inhaltsgleiche Theile.

10. In jeder dreiseitigen Pyramide theilt die Halbirungsebene jedes von den Grenzflächen gebildeten Flächenwinkels die gegenüberliegende Kante in zwei Abschnitte, welche sich zu einander verhalten wie die Flächeninhalte der anliegenden Seitenflächen.

11. Ein Würfel mit der Kante a sei von zwei parallelen, senkrecht zu einer Würfeldiagonale stehenden Ebenen, die durch eine Seitenecke und die Mitte einer Seitenkante gehen, geschnitten; wie verhalten sich bei jedem Schnitte die entsprechenden Theile der Diagonale zu einander, und wie gross sind Umfang und Inhalt der Schnittfiguren?

12. Das Trapezoëder ist ein von 24 congruenten Vierecken begrenzter Körper; in jedem dieser Vierecke sind zwei aneinander liegende Seiten paarweise gleich, so dass dasselbe durch eine seiner Diagonalen in zwei congruente und symmetrisch liegende Dreiecke getheilt wird. Der Körper hat 26 Ecken, von welchen 18 vierseitig sind und 6, für sich genommen, ihrer Lage nach die Ecken eines Würfels bilden würden; acht andere sind dreiseitig und entsprechen den Ecken eines regelmässigen Oktaëders. Man entwickele Formeln für die Berechnung der Axen, der Kanten-

und Flächenwinkel, der Oberfläche und des Volumens eines solchen Körpers.

13. Ein vierseitiger, rechtwinkeliger Bilderrahmen liefert senkrecht zu den parallelen Kanten je einer Seite einen Schnitt in der Gestalt eines Trapezes mit den parallelen Seiten a, b und der Höhe h. Die Länge der äusseren, längsten der vier Kanten an der einen Seite ist gleich c, an der anderen gleich d, und diese längsten Kanten gehen durch die Endpunkte der längeren parallelen Seite des jedesmaligen trapezförmigen Querschnitts. Man berechne das Volumen des Rahmens.

14. Ein Thurmknopf ist in der Mitte cylinderförmig und oben und unten halbkugelförmig abgerundet. Sein grösster Durchmesser von oben nach unten beträgt $a = 18^{cm}$, und sein Durchmesser quer durch die Mitte $b = 10^{cm}$; er ist $c = \frac{1}{4}^{cm}$ dick gearbeitet. Wie gross ist seine äussere Oberfläche, und wie gross ist der innere hohle Raum?

15. Ein Quadrat mit der Seite a sei gegeben; ein zweites, kleineres Quadrat mit der Seite $b\,(b < \frac{1}{2}a\sqrt{2})$ bewege sich so, dass sein Mittelpunkt der Reihe nach die Seiten des ersteren stetig durchlaufe, die eine seiner Diagonalen in der Ebene und beide Diagonalen senkrecht zu der betreffenden Seite des ersteren liegen, und dass an jedem Eckpunkt des ersteren die Ebene des beweglichen Quadrats durch eine Drehung von 90^0 um eine zu einer seiner Diagonalen parallele, durch einen Eckpunkt gehende Axe den Zwischenraum ausfülle, welcher bei dem Uebergang aus der einen Richtung in die nächste zwischen den Körpertheilen entstehen würde. Man berechne das Volumen des so beschriebenen rahmenförmigen Körpers.

16. Sechs gerade, regelmässig-sechsseitige Säulen, deren Grundkanten sämmtlich gleich a sind, liegen so, dass ihre Axen ein regelmässiges Sechseck von der Seite b bilden, und an jedem Eckpunkt des letzteren sich die beiden hier zusammentreffenden Prismen so durchschneiden, dass die Kanten des einen als gebrochene Fortsetzungen der entsprechenden Kanten des anderen erscheinen, und je zwei derselben in der Ebene der Axen liegen. Man berechne das Volumen des von den Seitenflächen der sechs Prismen eingeschlossenen Raumes von der Gestalt einer in sich zurücklaufenden sechsfach gebrochenen prismatischen Röhre.

17. a) In einen Würfel, dessen Kante gleich a ist, seien

zwei quadratische Prismen so hineingestellt, dass die Eckpunkte eines jeden die Seiten zweier parallelen Würfelflächen halbiren. Welche Form hat der beiden Prismen gemeinschaftliche Körper, und wie gross sind seine Oberfläche und sein Volumen?

b) Ebenso für den Körper, welcher allen drei auf die genannte Art construirbaren Prismen gemeinsam ist.

18. Zwei gerade, regelmässig-sechsseitige Säulen, deren Grundkanten dieselbe Länge a haben, durchdringen sich so, dass ein kreuzförmiger Körper entsteht, indem ihre Axen sich rechtwinkelig schneiden, und zwei parallele Seitenflächen des einen mit je einer von zwei parallelen Seitenflächen des anderen in dieselbe Ebene fallen. Welche Form hat das beiden Prismen gemeinschaftliche Körperstück, und wie gross sind seine Oberfläche und sein Volumen? Ebenso für den entstandenen kreuzförmigen Körper, wenn die Seitenkanten beider Prismen gleich b sind.

19. Ebenso, wie 18, mit der Abänderung, dass die Ebene der sich rechtwinkelig schneidenden Axen zwei parallele Seitenflächen eines jeden der beiden Prismen halbiren soll.

20. Der Staurolith, ein Mineral aus der Familie des Granats, kommt in Zwillingskrystallen vor, welche die Form des in Aufg. 19 behandelten Körpers haben; nur sind die Grundflächen keine regelmässigen Sechsecke, sondern als durch Abstumpfung der spitzen Ecken congruenter Rhomben durch zu der betreffenden Diagonale parallele Linien entstanden zu denken. Die durch die Ebene der beiden Axen halbirten Seitenflächen gehen durch die abstumpfenden Grundkanten. Man bestimme Gestalt, Grösse der Oberfläche und Volumen des beiden Prismen gemeinschaftlichen Körpers, wenn die Diagonalen der rhombischen Grundfläche bezüglich gleich c und d sind, und die längere d durch die Abstumpfung an jedem Endpunkt um $\frac{1}{4}$ derselben verkürzt ist.

In welchem Fall geht diese Aufgabe in die unter 19 über?

21. a) Zwei gerade Prismen, deren Grundflächen congruente gleichseitige Dreiecke sind, durchkreuzen sich so, dass eine durch eine Seitenkante senkrecht zu der gegenüberliegenden Seitenfläche gelegte Ebene des einen Prismas mit einer ebenso construirten des anderen in dieselbe Ebene fällt, so dass also zwei Seitenflächen beider Prismen und ebenso zwei Seitenkanten derselben sich rechtwinkelig schneiden. Man berechne aus der Grund-

kante a der Prismen die Oberfläche und das Volumen des beiden gemeinsamen Körperstücks.

b) Wie gestalten sich die Resultate dieser Aufgabe, wenn die Prismen sich so rechtwinkelig durchkreuzen sollen, dass eine Seitenfläche des einen Prismas mit einer solchen des anderen in dieselbe Ebene fällt?

22. Zwei gerade Cylinder mit gleichen Radien durchdringen sich so, dass ihre Axen sich rechtwinkelig schneiden. Wie gross ist die Oberfläche und wie gross der Rauminhalt des beiden Cylindern gemeinschaftlichen Körperstücks?

23. Zwei einander von innen berührende Kugeln, deren Volumina sich wie $m : n$ verhalten, seien durch eine Ebene geschnitten, welche auf der Centrallinie senkrecht steht und von dem Berührungspunkt um die Strecke p entfernt ist. Wie gross ist der Körper, welcher von den um den Berührungspunkt liegenden Calotten und der schneidenden Ringfläche begrenzt wird, wenn seine krumme Oberfläche gleich O ist? Insbesondere sei $m : n = 8 : 1$.

24. Zwei Kugeln mit den Radien R und r, welche einander von aussen berühren, werden von einem gemeinsamen Berührungskegel umhüllt. Wie gross ist der Inhalt des zwischen den drei krummen Flächen enthaltenen Körpers?

25. In einem geraden Kegel liege eine Kugel, welche den Kegelmantel in einem Kreise berührt, und deren Mittelpunkt von der Spitze des Kegels den Abstand a hat. Die Radien der Kugel und der Grundfläche des Kegels seien gegeben. Man berechne die Volumina der ausserhalb der Kugel über und unter derselben liegenden Theile des Kegels. Wie gross muss a sein, damit beide Räume einander gleich sind?

26. Es sei in ein regelmässiges Oktaëder, dessen Kante gleich a gegeben ist, sowie um dasselbe eine Kugel beschrieben; wie verhalten sich die Volumina zweier Kugeln zu einander, von denen jede die grössere der beiden ersteren Kugeln von innen berührt, während die kleinere der ersteren von der einen von ihnen von aussen, von der anderen umschliessend berührt wird?

27. Ebenso für a) einen Würfel, b) ein regelmässiges Tetraëder.

28. Zwei gleiche Würfel sind so in einander gesteckt, dass die Diagonalen zweier parallelen Flächen des einen zu den ent-

sprechenden Seiten zweier in dieselben Ebenen fallenden Flächen des anderen in deren Halbirungspunkten senkrecht stehen. Man berechne das Volumen des entstandenen Körpers aus der Würfelkante a. Ebenso berechne man den Inhalt seiner Oberfläche und construire sein Netz.

29. Ein Würfel und ein regelmässiges Oktaëder sind so in einander gesteckt, dass die durch die Ecken gehenden Axen des letzteren mit den durch die Mittelpunkte der Grenzflächen gehenden Axen des ersteren zusammenfallen, und die Halbirungspunkte der Würfelkanten auf den Kanten des Oktaëders liegen. Man berechne aus der Würfelkante a das Volumen und die Oberfläche des so entstandenen Körpers.

30. Ein regelmässiges Oktaëder und ein Würfel, welche gleiche Kanten haben, durchdringen sich so, dass jede Diagonalaxe des Oktaëders auf zwei Flächen des Würfels in deren Mittelpunkten senkrecht steht. Man berechne aus der Länge a der Kanten die Oberfläche und das Volumen des so entstandenen Körpers.

31. Zwei einander diametral gegenüberliegende Ecken eines Würfels mit der Kante a seien so abgestumpft, dass die Abstumpfungsflächen gleiche gleichseitige Dreiecke sind. Der übrigbleibende Körper sei durch ein Prismatoid ausgehöhlt, dessen Grundflächen diese Dreiecke, und dessen Seitenflächen sechs einander congruente Dreiecke sind. Man berechne das Volumen des ausgehöhlten Körpers, wenn die Seite der Abstumpfungsfläche gleich der Würfelkante ist.

32. Aus einem geraden Cylinder seien zwei Halbkugeln herausgeschnitten, deren Grundflächen bezüglich die des Cylinders sind, und die beiden Halbkugeln sollen sich von aussen berühren. Der übriggebliebene Körper soll durch eine um den Berührungspunkt beschriebene Kugelfläche so getheilt werden, dass das innerhalb der letzteren fallende Stück gleich dem $n$ten Theile des ganzen Körpers sei. Wie gross muss der Radius dieser Kugelfläche sein? $n = 2$ oder $n = \frac{4}{3}$.

33. † Ein gerader Kegel ist schief durchschnitten, und in den der Spitze anliegenden Abschnitt ist eine Kugel beschrieben, welche den Mantel und die Schnittfläche berührt, und deren Radius gleich r gegeben ist. Wie gross wird der Radius derjenigen Kugel sein, welche die Erweiterung des Mantels über die Schnitt-

fläche sowie die letztere berührt, wenn der Winkel an der Spitze eines Axenschnitts des Kegels gleich α, und der Neigungswinkel der Kegelaxe gegen die Schnittfläche gleich φ gegeben ist? $r = 5$, $\alpha = 30^0$, $\varphi = 45^0$.

34. Durch eine Diagonale der oberen Grundfläche eines geraden quadratischen Prismas mit der Grundkante a und der Seitenkante b seien zwei ebene Schnitte gelegt, von denen jeder eine nicht anliegende Seitenkante in gleicher Höhe c über der Grundfläche schneidet. Es entsteht ein Körper, welcher als Differenz des Prismas und zweier abgeschnittener dreiseitiger Pyramiden, oder als Summe zweier dreiseitiger Prismenstumpfe, oder als Summe eines quadratischen Prismas und eines Prismatoids (Sphenisk) betrachtet werden kann. Man berechne hiernach sein Volumen auf drei Arten.

35. Durch den Mittelpunkt der oberen Grundfläche eines geraden quadratischen Prismas mit der Grundkante a und der Seitenkante b seien vier ebene Schnitte gelegt, von denen jeder eine Seitenkante in derselben Höhe c über der Grundfläche schneidet, und dessen Ebene durch die beiden anliegenden Seitenkanten geht. Es ist ein prismatischer Körper mit pyramidaler Zuspitzung entstanden. Man berechne sein Volumen.

36. Auf drei abwechselnden Seitenkanten eines geraden, regelmässig-sechsseitigen Prismas seien von der Grundfläche aus gleichlange Strecken abgeschnitten; ihre Länge sei gleich a. Es sei ferner durch einen Punkt S auf der Axe des Prismas und je zwei Endpunkte jener Strecken eine Ebene gelegt. Man berechne das Volumen des entstandenen prismatischen Körpers mit pyramidaler Zuspitzung und zeige, dass dasselbe bei constantem Werthe von a unabhängig von der Lage des Punktes S auf der Axe ist.

37. Durch den Mittelpunkt der oberen Grundfläche eines geraden, regelmässig-sechsseitigen Prismas seien sechs Ebenen gelegt, von denen jede eine Seitenkante in derselben Höhe a über der Grundfläche schneidet und gegen die beiden anliegenden Seitenflächen unter gleichen Winkeln geneigt ist. Die Grundfläche des Prismas hat den Inhalt G, die Höhe desselben ist gleich b. Man berechne das Volumen des entstandenen prismatischen Körpers mit pyramidaler Zuspitzung.

38. Zwei Kugeln, deren Radien gleich R und r gegeben

sind, schneiden einander so, dass das innerhalb beider Kugeln liegende Stück der Centrallinie gleich d ist. Man berechne das Volumen des beiden Kugeln gemeinsamen linsenförmigen Körpers.

Wieviel beträgt insbesondere der Rauminhalt dieses Körpers, wenn der Mittelpunkt der kleineren Kugel in der Oberfläche der grösseren liegt?

39. Eine Anzahl gleicher Kugeln ist in Form einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet; in der obersten Schicht liegt eine Kugel, in der zweiten liegen drei, in der dritten sechs Kugeln, u. s. w. An die drei Seiten dieses Haufens seien Berührungsebenen gelegt; dieselben bilden mit der Horizontalebene, auf welcher die unterste Schicht ruht, ein regelmässiges Tetraëder. Wie verhält sich der durch die Kugeln ausgefüllte Raum dieses Tetraëders zu dem übrigbleibenden leeren Raum, wenn der Kugelhaufen n Schichten hat? Welches ist der Grenzwerth dieses Verhältnisses, wenn n bis in's Unendliche wächst?

§. 33. Themata zu grösseren Arbeiten.

1. Die Hauptgestalten des regelmässigen oder die des hexagonalen Krystallsystems in stereometrischer Behandlung.

Aus dem Würfel lassen sich durch gleichmässige Abstumpfung der Ecken oder Abstumpfung der Kanten, Zuschärfung der Kanten, Zuspitzung der Ecken von den Flächen oder von den Kanten aus oder von beiden zugleich die folgenden Körper und ihre Combinationen ableiten: Regelmässiges Oktaëder, Rhombendodekaëder oder Granatoëder, Tetrakishexaëder oder Pyramidenwürfel, Deltoidikositetraëder oder Leucitoid, Triakisoktaëder oder Pyramidenoktaëder und Tetrakontaoktaëder oder Achtundvierzigflächner. Man bestimme für diese Körper die Anzahl und Längen der Kanten (z. B. aus der Länge a der Kante des ursprünglichen Würfels), die Anzahl und Beschaffenheit der Ecken nebst den Kantenwinkeln und Flächenwinkeln derselben, die Anzahl, Beschaffenheit und den Flächeninhalt der einzelnen Grenzflächen, den Inhalt der gesammten Oberfläche und das Volumen. Endlich construire man ein Netz des Körpers behufs Anfertigung eines Modells. — In gleicher Weise wie von dem Würfel kann hierbei von dem Oktaëder ausgegangen werden, auch kann man zugehörige halbflächige (hemiëdrische) Körper, wie das regelmässige Tetraëder, das Trigondodekaëder u. a. heranziehen.

Hierher gehören u. a. die vorhergegangenen Aufgaben: §. 13, Nr. 1—5, 10, 11, 14, 16—20, 45, 48, 53, 54; §. 15, Nr. 23, 25.—27; §. 22, Nr. 1, 6, 8, 30, 33—35, 37, 38; §. 32, Nr. 12. Ausserdem möge die folgende Auswahl leichterer Aufgaben aus diesem Gebiete beispielsweise im Einzelnen angeführt werden:

a) Den Winkel zu berechnen, den die Fläche eines regelmässigen Oktaëders mit der Ebene zweier Axen bildet.

b) Ebenso den Winkel zwischen einer Axe desselben Körpers und der vom Axendurchschnitt auf eine Fläche desselben gefällten Senkrechten zu berechnen.

c) Ebenso den Winkel zwischen der Oktaëder- und der Würfelfläche und den Winkel zweier in einem Eckpunkt (nicht einer Kante) zusammenstossenden Oktaëderflächen.

d) Den Winkel zwischen einer Rhombendodekaëder- und einer anstossenden Oktaëderfläche zu berechnen.

e) Das Volumen eines Rhombendodekaëders aus seiner Kante zu bestimmen.

f) Den Winkel an der Spitze der gleichschenkeligen Dreiecke zu berechnen, welche das Tetrakishexaëder $2O\infty$ begrenzen. Ebenso für $3O\infty$.

g) Man berechne den Winkel, welchen die vom Axendurchschnitt auf die Fläche des Tetrakishexaëders $2O\infty$ gefällte Senkrechte mit der durch einen Eckpunkt der Fläche gehenden Axe bildet und aus demselben den Winkel zweier einander in einer Würfelkante schneidenden Flächen des Körpers. Ebenso für $3O\infty$.

h) Den an der Oktaëderecke liegenden Winkel eines das Ikositetraëder 202 begrenzenden Vierecks zu berechnen. Ebenso für 303. (Erweitere die Fläche des Vierecks bis zum Durchschnitt mit den drei Axenebenen.)

i) Man berechne den Winkel, welchen die vom Axendurchschnitt auf eine Fläche des Ikositetraëders 202 gefällte Senkrechte mit der durch einen Eckpunkt der Fläche gehenden Axe bildet, ferner den Winkel zweier in einer Oktaëderecke (nicht Kante) zusammenstossenden Flächen dieses Körpers und die Winkel zwischen einer Fläche desselben und der Würfel- und Oktaëderfläche.

k) Den Winkel zu berechnen, welchen die Fläche des

Triakisoktaëders $2O$ mit der Ebene der beiden Axen bildet, von denen sie gleiche Stücke abschneidet. (Durchschnittslinie ist eine Oktaëderkante.) Ebenso für $\frac{3}{2}O$.

l) Den Winkel an der Spitze der die hexagonale Pyramide begrenzenden Dreiecke zu berechnen. (Länge der Nebenaxen $= 1$, der Hauptaxe $= c$.)

m) Den Winkel zu berechnen, den eine Grenzfläche der hexagonalen Pyramide mit der Ebene der Nebenaxen bildet. Vergl. l).

n) Das Volumen eines Rhomboëders aus den Diagonalen einer Grenzfläche zu berechnen. (Man unterscheide ein spitzwinkeliges und ein stumpfwinkeliges Rhomboëder.) Vergl. §. 19, 44 u. 45.

o) Den Winkel zweier aneinanderstossenden Flächen eines Rhombendodekaëders zu berechnen. (Anwendung der rechtw. Ecke, deren Kanten die vom Axendurchschnitt auf die beiden Flächen gefällten Senkrechten und die Axe sind.)

p) Ebenso den Winkel zweier einander in einer der längeren Seiten schneidenden Flächen des Ikositetraëders $2O2$, oder $3O3$. Vergl. i).

q) Ebenso den Winkel zweier Flächen des Tetrakishexaëders $2O\infty$, die einander in einem Schenkel eines begrenzenden gleichschenkeligen Dreiecks schneiden. Ebenso für $3O\infty$. Vergl. g).

r) Ebenso den Winkel zweier Flächen eines Rhomboëders, die einander in einer Endkante schneiden. Vergl. m).

s) Ebenso den Winkel zweier Flächen des Triakisoktaëders $2O$, die in einem Schenkel eines begrenzenden Dreiecks zusammenstossen. Vergl. k).

Die Aufgaben o)—s) sind mittelst sphärischer Trigonometrie zu behandeln.

2) Die Archimedischen Körper.

Ein Archimedischer oder halbregelmässiger Körper ist ein Polyeder, dessen Seitenflächen regelmässige geradlinige Figuren, jedoch nicht, wie bei einem regelmässigen, von gleicher Seitenzahl, und dessen Ecken congruent sind. Zur Bestimmung der Anzahl und Beschaffenheit der archimedischen Körper findet namentlich der Euler'sche Lehrsatz $e + f = k + 2$ Anwendung. Da alle Ecken dieselbe Seitenzahl m haben und also $k = \frac{1}{2} me$ ist, so folgt zunächst aus diesem Satze $e = \frac{2(f-2)}{m-2}$, $k = \frac{m(f-2)}{m-2}$.

Man zeige ferner, dass ein archimedischer Körper nicht mehr als drei Arten von Seitenflächen zugleich, und dass keine Ecke eines solchen mehr als fünf Kanten haben kann. Man kann dieselben also eintheilen in solche mit zweierlei und solche mit dreierlei Seitenflächen, sowie in solche mit dreiseitigen, vierseitigen und fünfseitigen Ecken. Es giebt im Ganzen 15 Arten archimedischer Körper, nämlich 12 mit zweierlei und 3 mit dreierlei Seitenflächen. Man kann dieselben nach der Beschaffenheit ihrer Ecken und Flächen, wie folgt, gruppiren:

a) mit dreiseitigen Ecken: Jede Ecke wird eingeschlossen α) von einem a-Eck und zwei b-Ecken, und zwar kann 1) $a = n$, $b = 4$; 2) $a = 3$, $b = 6$; 3) $a = 3$, $b = 8$; 4) $a = 3$, $b = 10$; 5) $a = 4$, $b = 6$; 6) $a = 5$, $b = 6$ sein. β) von einem a-Eck, einem b-Eck und einem c-Eck, und dann ist 7) $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$, oder 8) $a = 4$, $b = 6$, $c = 10$.

b) mit vierseitigen Ecken: Jede Ecke wird eingeschlossen α) von drei a-Ecken und einem b-Eck: 9) $a = 3$, $b = n$; 10) $a = 4$, $b = 3$. β) von zwei a-Ecken und zwei b-Ecken: 11) $a = 3$, $b = 4$; 12) $a = 3$, $b = 5$. γ) von einem a-Eck, zwei b-Ecken und einem c-Eck: 13) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

c) mit fünfseitigen Ecken: Jede Ecke wird von vier a-Ecken und einem b-Eck eingeschlossen: 14) $a = 3$, $b = 4$; 15) $a = 3$, $b = 5$.

Will man sich für die Berechnung der Winkel, Flächen, Axen, des Volumens und die Construction der Netze dieser Körper auf die einfacheren derselben beschränken, so kann man Nr. 1—6, 9, 11 und 12 auswählen. Für diese sind folgende Bemerkungen beachtenswerth: Nr. 1 ist ein regelmässiges n-seitiges Prisma, dessen Seitenflächen Quadrate, Nr. 9 ein Prismatoid, dessen Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind (ein regelmässiges Antiprisma). Die übrigen lassen sich aus den regelmässigen Polyedern ableiten. Durch Abstumpfung der Ecken eines solchen bis zur Mitte der anliegenden Kanten erhält man Nr. 11 und 12; stumpft man dagegen alle Ecken nur soweit ab, dass aus den n-seitigen Seitenflächen regelmässige $2n$-Ecke entstehen, so erhält man die Körper Nr. 2 bis 6. — Durch gleichzeitige Abstumpfung der Ecken und der Kanten lassen sich aus den regelmässigen Körpern die archimedischen 10, 11, 13, sowie bei weniger tief einschneidender Abstumpfung 5, 7 und 8 ableiten.

3) Untersuchung der verschiedenen (senkrechten) Projectionen regelmässiger Polyeder auf eine Ebene.

4) Ueber Tetraëder (dreiseitige Pyramiden) und ihre merkwürdigen Punkte. — Analogon zu den sogenannten merkwürdigen Punkten des Dreiecks.

5) Die Elemente der Theorie der Potenzen, Pole und Polaren, sowie der Aehnlichkeitspunkte in der Ebene auf die Kugel übertragen.

6) Das Apollonische Berührungsproblem für den Raum.

Es soll eine Kugel construirt werden, welche vier gegebene Kugeln berührt, wobei an Stelle einer jeden der letzteren auch eine zu berührende Ebene oder ein Punkt für die Oberfläche der gesuchten Kugel treten kann. Die Aufgabe zerfällt hiernach in fünfzehn einzelne. Anhaltspunkte für ihre Behandlung geben u. a. das entsprechende Problem für den Kreis in der Ebene und die Resultate der vorhergehenden Aufgabe 5.

7) Untersuchung der Eigenschaften sphärischer Vierecke und Polygone.

Lassen sich Analoga zu den verschiedenen Arten der ebenen Vierecke und zu Sätzen über dieselben finden? Ebenso für regelmässige Polygone. Erweiterung von Sätzen über sphärische Dreiecke.

8) Ueber die Schwerpunkte der Figuren und Körper.

a) Begriff und Bestimmung des Schwerpunkts eines Systems von Punkten. Annahme von Coëfficienten (Gewichten) der einzelnen Punkte. Allgemeine Eigenschaften eines solchen Schwerpunktes. Bestimmung des Schwerpunktes eines Systems von Strecken, der Umfänge geradliniger Figuren, des Kreises und der Kreisbogen. Schwerpunkte der Flächen ebener Figuren. Bestimmung der Schwerpunkte der einfacheren Körper.

b) Die Guldin'sche Regel (vergl. §. 30, Nr. 3) und Anwendung derselben zur Bestimmung der Oberflächen und der Volumina von Rotationskörpern, sowie umgekehrt zur Bestimmung der Schwerpunkte von letzteren aus der Oberfläche und dem Volumen.

c) Ueber Prismen- und Cylinderhufe, d. h. die zwischen zwei einander nicht parallelen Ebenen eingeschlossenen Theile